

Università di Trento - Dip. di Psicologia e Scienze Cognitive
 CdL in Scienze e Tecniche di Psicologia Cognitiva
 ESAME SCRITTO di ANALISI MATEMATICA
 a.a. 2013-2014 - Rovereto, 31 luglio 2014

FILA (A)

i)

P: V V V V F F F F

Q: V V F F V V F F

R: V F V F V F V F

$P \Rightarrow Q$: V V F F V V V V

$Q \Rightarrow R$: V F V V V F V V

$(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R)$: V F F F V F V V

$P \Rightarrow R$: V F V F V V V V

$[(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R)] \Rightarrow (P \Rightarrow R)$: V V V V V V V V

□

ii) Sia A = "Marco Rossi supera l'esame di Analisi Matematica nella sessione d'esami estiva";

B = "Marco Rossi si laurea entro dicembre 2014".

Allora la proposizione data si scrive " $A \Rightarrow B$ ".

■

$$2) i) \bullet \frac{x|x+1|-2}{\sqrt{x}} \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x(x+1)-2 \leq 0 \end{cases} \text{ altrimenti non ha senso } \frac{1}{\sqrt{x}}; \text{ inoltre } \sqrt{x} > 0 \forall x > 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x^2+x-2 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ (x+2)(x-1) \leq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{A =]0, 1]}}$$

□

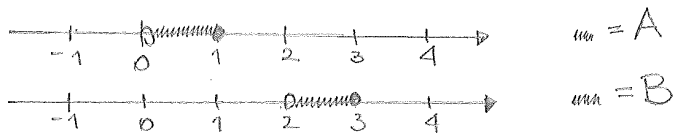
$$\bullet \log_3(x^2-2x) + \log_3|x| \leq 1 + \log_3 x$$

$$\begin{cases} x^2-2x > 0 \\ x > 0 \\ \log_3(x^2-2x) \leq \log_3 3 \end{cases}$$

$$\text{poiché } x > 0 \Rightarrow \log_3|x| = \log_3 x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \vee x > 2 \\ x > 0 \\ x^2-2x \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2 \\ x^2-2x-3 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2 \\ (x-3)(x+1) \leq 0 \end{cases}$$

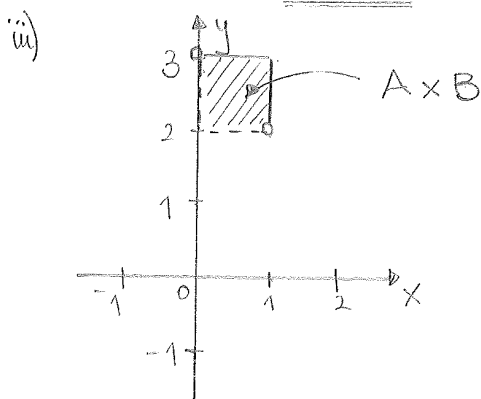
$$\Rightarrow \underline{\underline{B =]2, 3]}}$$



A e B sono insiemi limitati; inoltre $\min A, \max A = 1$
 $\min B, \max B = 3$. $\square$

ii) $A \cup B = [0, 1] \cup [2, 3]$, non è un intervallo!

$A \setminus B = A = [0, 1]$ è un intervallo! $\square$



3) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} e^x - 1 & \text{se } x < 0 \\ ax + b & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ -(x-2)^2 + 3 & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

i) continuità in $x=0$: $\Leftrightarrow$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$$

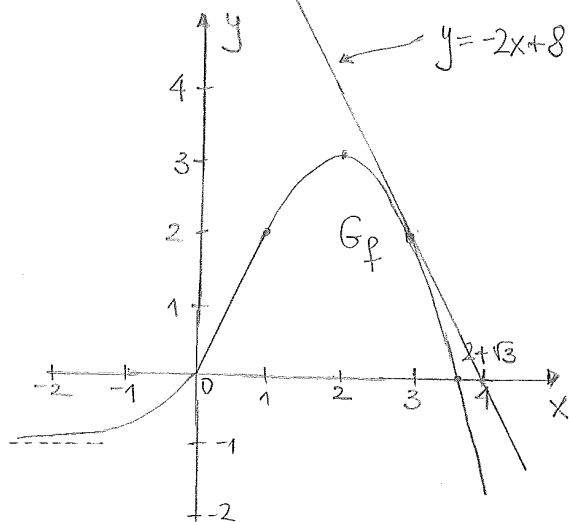
$$e^0 - 1 = b \Rightarrow \underline{b=0}$$

continuità in $x=1$: $\Leftrightarrow$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1)$$

$$\Rightarrow \underline{a=2}.$$

Quindi si ha $f(x) = 2x$ per $x \in [0, 1]$. $\square$



ii) $\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{e^h - 1}{h} = 1$

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{2h}{h} = 2;$$

f non è derivabile in $x=0$! $\square$

iii) Per $x > 1$ $f'(x) = -2(x-2)$, quindi $f'(3) = -2$ e ne segue

$$y = f(3) + f'(3)(x-3) \\ = 2 - 2(x-3), \text{ e quindi } y = -2x + 8.$$

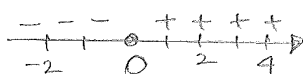
□

- iv) Se $k \leq -1$, $\exists$ una soluzione dell'eq. $f(x) = k$;
 se $-1 < k < 3$, $\exists$ due soluzioni dell'eq. " ;
 se $k = 3$, $\exists$ una soluzione dell'eq. " ;
 se $k > 3$, $\nexists$ soluzioni dell'eq. $f(x) = k$.

■

4) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = x e^{3x}$

• segno di f

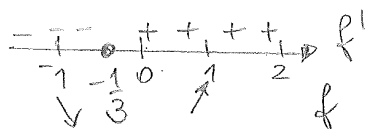
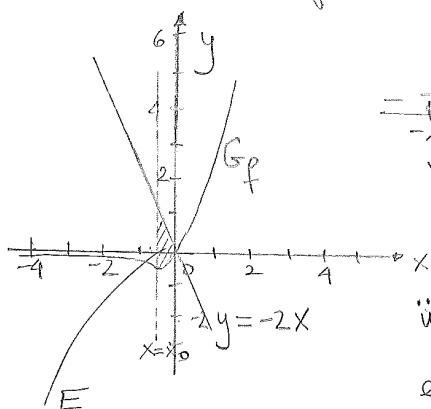


• $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$; f è continua su $\mathbb{R}$;

• $\text{dom } f' = \mathbb{R}$ $f'(x) = e^{3x} + 3x e^{3x} = e^{3x} (1 + 3x)$ $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{3}$

$x = -\frac{1}{3}$ p.t. di minimo (loc) stretto
 p.u. f

$f(-\frac{1}{3}) = -\frac{1}{3} e^{-1} = -\frac{1}{3e}$. □



ii) $F(x) = \left(\frac{x}{3} - \frac{1}{9}\right) e^{3x}$ è una funzione derivabile su $\mathbb{R}$

$F'(x) = \frac{1}{3} e^{3x} + \left(\frac{x}{3} - \frac{1}{9}\right) e^{3x} \cdot 3 = \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3} + x\right) e^{3x} = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$ □

iii) $f^{(1)}(x) = (1+3x) e^{3x}$

$f^{(2)}(x) = 3 e^{3x} + (1+3x) e^{3x} \cdot 3 = (6+9x) e^{3x}$

$f^{(3)}(x) = 9 e^{3x} + (6+9x) e^{3x} \cdot 3 = (27+27x) e^{3x}$

$f^{(4)}(x) = 27 e^{3x} + (27+27x) e^{3x} \cdot 3 = (108+81x) e^{3x}$

$\sum_{n=1}^4 \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = 1 + \frac{6}{2!} + \frac{27}{3!} + \frac{108}{4!} = 1 + \frac{6}{2} + \frac{27}{6} + \frac{108}{24} = 1 + 3 + 4.5 + 4.5 = 13$ □

iv) $\text{area}(E) = \int_{-\frac{1}{3}}^0 (-2x - f(x)) dx = \left[-x^2 - F(x) \right]_{-\frac{1}{3}}^0 = \left(+\frac{1}{9} \right) - \left(-\frac{1}{9} - F(-\frac{1}{3}) \right) =$
 $= \frac{2}{9} + \left(-\frac{2}{9} \right) e^{-1} = \frac{2}{9} \left(1 - \frac{1}{e} \right).$ ■

5) i) $f(x) = (x-1)^2(2x+3)$ • $\text{dom } f = \mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$

• segno di $f(x)$

$(x-1)^2$	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
$2x+3$	-	-	-	-	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
$f(x)$	-	-	-	-	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+

• $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

• f continua su $\mathbb{R}$

• $\text{dom } f' = \mathbb{R}$ $f'(x) = 2(x-1)(2x+3) + (x-1)^2 \cdot 2$

$= 2(x-1)[2x+3 + x-1] = 2(x-1)(3x+2)$

$= 4(x-1)(3x+2)$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x=1$
 $x=-\frac{2}{3}$
 pt. critici per f

segno di $f'(x)$

$f'(x)$	+	+	+	-	-	-	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
$f(x)$	-	-	-	-	-	-	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+

$x = -\frac{2}{3}$ pt. di max. loc. stretto per f

$f(-\frac{2}{3}) = (-\frac{5}{3})^2(-\frac{1}{3} + \frac{9}{3}) = \frac{125}{27} \approx 4.6$

$x = 1$ pt. di min. loc. stretto per f

$f(1) = 0$

• $\text{dom } f'' = \mathbb{R}$

$f''(x) = 4(3x+2) + 4(x-1) \cdot 3 = 24x - 4 = 4(6x - 1)$

segno di f''

f''	-	-	-	-	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
f	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-

ii) $\max_{[-2,0]} |f(x)| = 9$

$x = -2$ pt. di max.

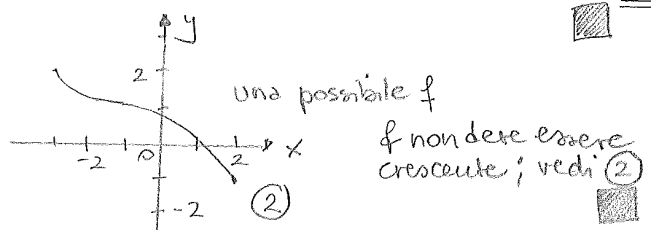
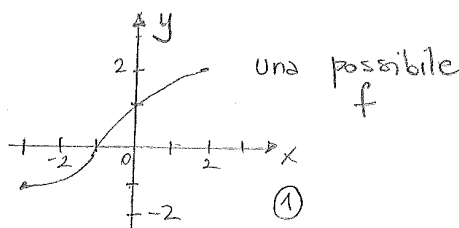
$\min_{[-2,0]} |f(x)| = 0$

$x = -\frac{2}{3}$ pt. di minimo.

iii) $\int_0^1 |f(x)| dx = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 (x-1)^2(2x+3) dx = \int_0^1 (x^2 - 2x + 1)(2x+3) dx =$

$= \int_0^1 (2x^3 + x^2 - 4x + 3) dx = \left[\frac{x^4}{2} + \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x \right]_0^1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - 2 + 3 = \frac{7}{6}$

6)



FILA (B)

1) i) vedi Es. 1 i) Fila (A). □

ii) Sia $A =$ "Marco Rossi non supera l'esame di Analisi Matematica nella sessione d'esami estiva";

$B =$ "Marco Rossi non si laurea entro dicembre 2014".

Allora la proposizione data si scrive " $A \Rightarrow B$ ". □

$$2) i) \cdot \frac{x|x+3|-4}{\sqrt{x}} \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 & \text{altrimenti non ha senso } \frac{1}{\sqrt{x}} \\ x(x+3)-4 \leq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x^2+3x-4 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ (x+4)(x-1) \leq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow A =]0, 1].$$

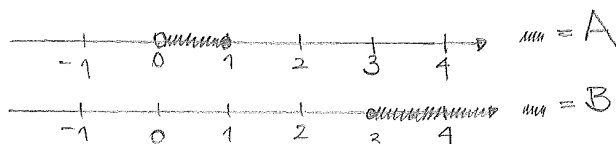
$$\bullet \log_3(x^2-2x) + \log_3|x| \geq 1 + \log_3 x$$

$$\begin{cases} x^2-2x > 0 \\ x > 0 \\ \log_3(x^2-2x) \geq \log_3 3 \end{cases}$$

perché $x > 0 \Rightarrow \log_3|x| = \log_3 x$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \text{ o } x > 2 \\ x > 0 \\ x^2-2x \geq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2 \\ x^2-2x-3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2 \\ (x-3)(x+1) \geq 0 \end{cases}$$

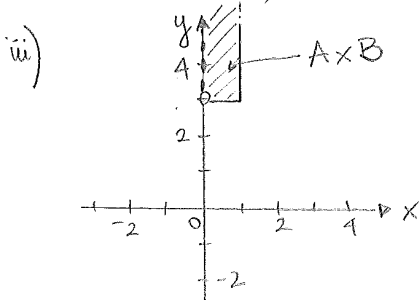
$$\Rightarrow B = [3, +\infty[.$$



A è un insieme limitato, mentre B non lo è (B è solo limitato inferiormente); inoltre $\inf A$, $\max A = 1$;

$$\underline{\inf B = 3}, \underline{\max B}.$$

ii) $A \cup B =]0, 1] \cup [3, +\infty[$, $A \cap B =]0, 1]$; il primo insieme non è un intervallo, il secondo sì. □



3) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} e^x - 1 & \text{se } x < 0 \\ ax + b & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ -(x-2)^2 + 4 & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

i) continuità in $x=0$: $\Leftrightarrow$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) \Leftrightarrow e^0 - 1 = b \Rightarrow \underline{b=0}$$

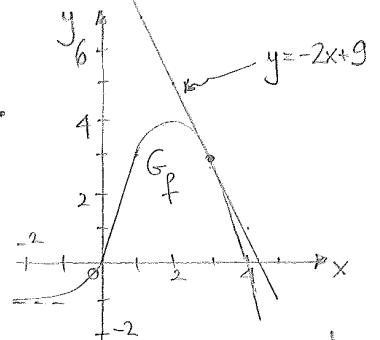
continuità in $x=1$: $\Leftrightarrow$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) \Leftrightarrow \underline{a=3}.$$

Quindi si ha $f(x) = 3x$ per $x \in [0, 1]$. $\square$

ii) $\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{e^h - 1}{h} = 1$

$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{3h}{h} = 3$; f non è derivabile in $x=0$! $\square$



iii) Per $x > 1$, $f'(x) = -2(x-2)$, quindi $f'(3) = -2$ e ne segue

$$y = f(3) + f'(3)(x-3) = 3 - 2(x-3), \text{ e quindi } \underline{y = -2x + 9}. \quad \square$$

iv) Se $k \leq -1$, $\exists$ una soluzione dell'eq. $f(x) = k$;

se $-1 < k < 4$, Sono due soluzioni dell'eq. $f(x) = k$;

se $k = 4$, $\exists$ una soluzione dell'eq. $f(x) = k$;

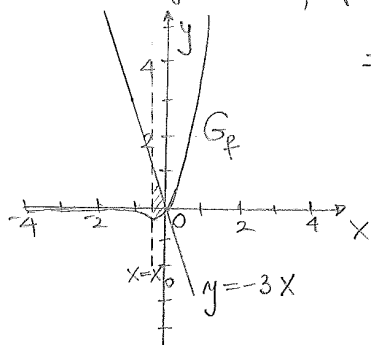
se $k > 4$, Sono soluzioni dell'eq. $f(x) = k$. $\blacksquare$

4) i) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = xe^{4x}$

• segue da f

• $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$; f è continua in $\mathbb{R}$;

• $\text{dom } f' = \mathbb{R}$, $f'(x) = e^{4x} + 4xe^{4x} = e^{4x}(1+4x)$ $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{4}$



$f'(x)$ $x = -\frac{1}{4}$ pt. di minimo (loc) stretto per f

$$f(-\frac{1}{4}) = -\frac{1}{4}e^{-1} = -\frac{1}{4e} \quad \square$$

ii) $F(x) = (\frac{x}{4} - \frac{1}{16})e^{4x}$ è una funzione derivabile in $\mathbb{R}$

$$e \quad F'(x) = \frac{1}{4}e^{4x} + (\frac{x}{4} - \frac{1}{16})e^{4x} \cdot 4 = xe^{4x} = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \square$$

$$\text{iii)} \quad f^{(1)}(x) = (1+4x)e^{4x}$$

$$f^{(2)}(x) = 4e^{4x} + (1+4x)e^{4x} \cdot 4 = (8+16x)e^{4x}$$

$$f^{(3)}(x) = 16e^{4x} + (8+16x)e^{4x} \cdot 4 = (48+64x)e^{4x}$$

$$f^{(4)}(x) = 64e^{4x} + (48+64x)e^{4x} \cdot 4 = (256+256x)e^{4x}$$

$$\sum_{n=1}^4 \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = 1 + \frac{8}{2!} + \frac{48}{3!} + \frac{256}{4!} = 1 + \frac{8}{2} + \frac{48}{3 \cdot 2} + \frac{256}{4 \cdot 3 \cdot 2} \\ = 13 + \frac{32}{3} = \frac{71}{3} \quad \square$$

$$\text{iv)} \quad \text{area}(E) = \int_{-1/4}^0 (-3x - f(x)) dx = \left[-\frac{3x^2}{2} - F(x) \right]_{-1/4}^0 = \left(\frac{1}{16} \right) - \left(-\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{16} - F(-\frac{1}{4}) \right) = \\ = \frac{5}{32} + \left(-\frac{1}{8} \right) e^{-1} = \frac{1}{32} \left(5 - \frac{4}{e} \right). \quad \blacksquare$$

$$5) i) \quad f(x) = (x+1)^2(2x-3) \quad \bullet \quad \text{dom } f = \mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$$

• segue di f

$(x+1)^2$	$\begin{array}{ccccccc} + & - & + & + & + & + & + \\ -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & & \end{array}$
$2x-3$	$\begin{array}{ccccccc} - & - & - & - & - & + & + \\ -2 & -1 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & 2 & \end{array}$
$f(x)$	$\begin{array}{ccccccc} - & - & - & - & - & + & + \\ -2 & -1 & & & & \frac{3}{2} & 2 \end{array}$

• $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

• f è continua in $\mathbb{R}$

• $\text{dom } f' = \mathbb{R} \quad f'(x) = 2(x+1)(2x-3) + (x+1)^2 \cdot 2$
 $= 2(x+1)[2x-3 + x+1] = 2(x+1)(3x-2)$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{array}{l} x = -1 \\ x = \frac{2}{3} \end{array} \quad \left. \vphantom{\begin{array}{l} x = -1 \\ x = \frac{2}{3} \end{array}} \right\} \text{pt. critici per } f$$

$x = -1$ pt. di max loc. stretto per f

$$f(-1) = 0$$

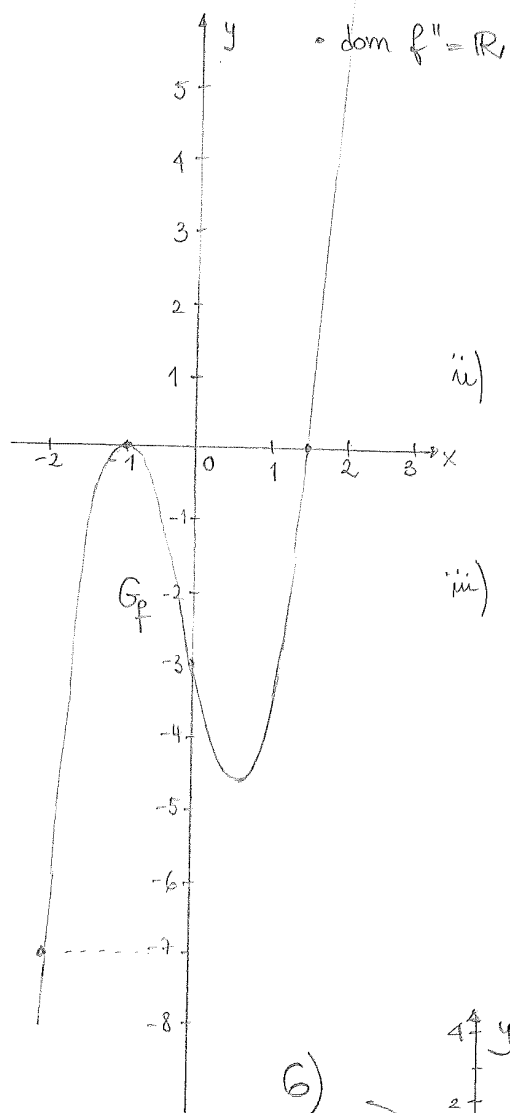
$x = \frac{2}{3}$ pt. di min. loc. stretto per f

$$f\left(\frac{2}{3}\right) = \left(\frac{5}{3}\right)^2 \left(2 \cdot \frac{2}{3} - 3\right) = \frac{25}{9} \cdot \left(-\frac{5}{3}\right) = -4.\bar{6}$$

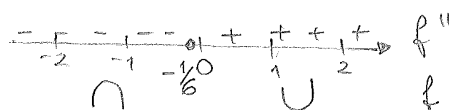
$x+1$	$\begin{array}{ccccccc} - & - & + & + & + & + & + \\ -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & & \end{array}$
$3x-2$	$\begin{array}{ccccccc} - & - & - & - & - & + & + \\ -2 & -1 & & & & \frac{2}{3} & 1 \end{array}$
$f'(x)$	$\begin{array}{ccccccc} + & + & + & - & - & + & + \\ -2 & -1 & & & & \frac{2}{3} & 1 \end{array}$

$\nearrow$ $\searrow$ $\nearrow$
 -1 0 $\frac{2}{3}$ 1 f

-8-



• $\text{dom } f'' = \mathbb{R}$ $f''(x) = 2[(3x-2) + (x+1)3] =$
 $= 2[6x+1]$



□

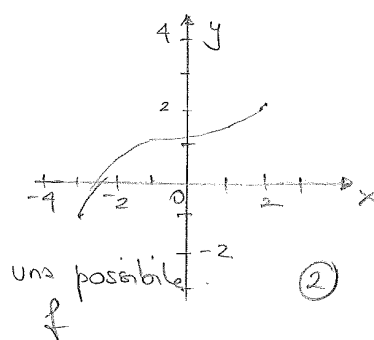
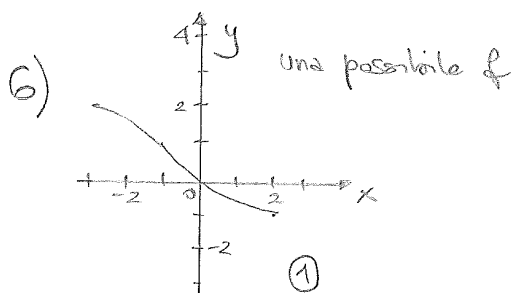
ii) $\max_{x \in [-2, 0]} |f(x)| = \underline{\underline{7}} \quad \underline{\underline{x = -2 \text{ pt. di max.}}}$

$\min_{x \in [-2, 0]} |f(x)| = \underline{\underline{0}} \quad \underline{\underline{x = -1 \text{ pt. di min.}}}$

□

iii) $\int_0^1 |f(x)| dx = - \int_0^1 f(x) dx = - \int_0^1 (x^2 + 2x + 1)(2x - 3) dx$
 $= \int_0^1 (-2x^3 - x^2 + 4x + 3) dx =$
 $= \left[-\frac{x^4}{2} - \frac{x^3}{3} + 2x^2 + 3x \right]_0^1 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + 2 + 3 = \underline{\underline{\frac{25}{6}}}$

■



f non deve essere una funzione crescente; vedi ①.

■