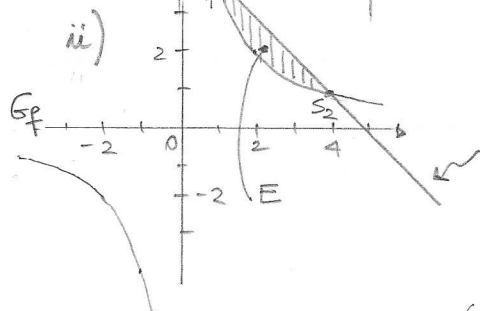
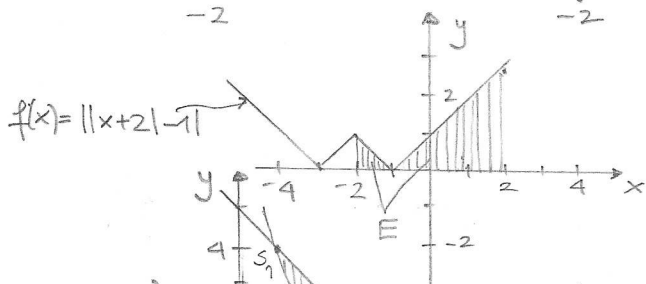


FILA (A)

1) i) $\int_1^3 \frac{x^3 + 2\sqrt[3]{x} + 1}{x} dx = \int_1^3 (x^2 + 2x^{-2/3} + \frac{1}{x}) dx = \left[\frac{x^3}{3} + 2\frac{x^{1/3}}{1/3} + \log|x| \right]_1^3$
 $= \left[9 + 6\sqrt[3]{3} + \log 3 \right] - \left(\frac{1}{3} + 6 \right) = \underline{\underline{\frac{8}{3} + 6\sqrt[3]{3} + \log 3}}$

$\int_{-2}^2 ||x+2|-1| dx + \int_{-2}^2 1 dx = \text{area}(E) + [x]_{-2}^2 =$
 $= \frac{1}{2} + \frac{3 \cdot 3}{2} + 4 = \underline{\underline{9}}$



$f(x) = \frac{4}{x} \quad y = -x+5$

I punti di intersezione soddisfanno $\begin{cases} \frac{4}{x} = -x+5 \\ y = -x+5 \end{cases}$

Ors $\begin{cases} 4 = -x^2 + 5x \\ y = -x+5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 5x + 4 = 0 \\ y = -x+5 \end{cases}$

$\Rightarrow S_1 = (1, 4), S_2 = (4, 1)$

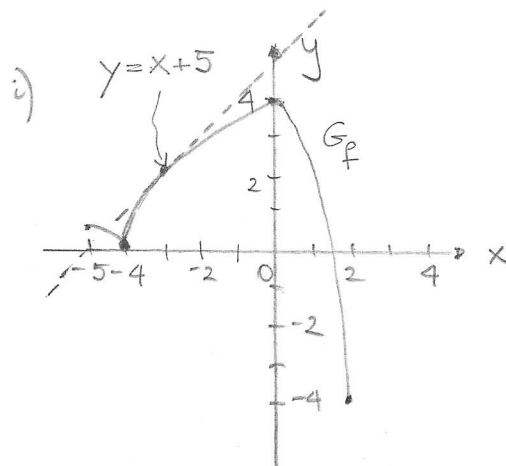
Quindi $\text{area}(E) = \int_1^4 (-x+5 - \frac{4}{x}) dx = \left[-\frac{x^2}{2} + 5x - 4\log|x| \right]_1^4 = \left[(-8+20-4\log 4) - \left(-\frac{1}{2}+5\right) \right] = (12-4\log 4) - \frac{9}{2} = \underline{\underline{\frac{15}{2} - 4\log 4}}$

iii) $\int_0^1 \frac{2x}{x^2+1} dx + \int_0^4 \frac{2x}{(x^2+1)^2} dx + \int_0^1 \frac{2x}{(x^2+1)^3} dx = \log(x^2+1) \Big|_0^1 + \frac{(x^2+1)^{-1}}{-1} \Big|_0^1 + \frac{(x^2+1)^{-2}}{-2} \Big|_0^1$
 $= -\log 2 + \frac{7}{8}$

iv) $= \sum_{n=1}^{15} \frac{x_{2n}}{(n-1)!} (-1)^{n+1}$

2) $f: [-5, 2] \rightarrow \mathbb{R}$

$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{4} & \text{se } -5 \leq x < -4 \\ 2\sqrt{x+4} & \text{se } -4 \leq x \leq 0 \\ -(x+1)^2 + 5 & \text{se } 0 < x \leq 2 \end{cases}$



$$\text{ii) } \left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -4^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -4^-} \left(\frac{1}{x} + 1 \right) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -4^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -4^+} 2\sqrt{x+4} = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -4} f(x) = 0. \text{ Poiché inoltre } f(-4) = 0, \\ \text{risulta che } f \text{ è continua in } x = -4.$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} 2\sqrt{x+4} = 4 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} [-(x+1)^2 + 5] = 4 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 4. \text{ Poiché inoltre } f(0) = 4, \\ \text{risulta che } f \text{ è continua in } x = 0. \square$$

iii) f è continua su $[-5, 2]$ essendo a tratti una funzione continua e per ii) f è anche continua in $x = -4$ e $x = 0$.

Poiché inoltre $f(-5) = -\frac{1}{5} + \frac{1}{4} = \frac{1}{20} > 0$ e $f(2) = -4 < 0$, si ha che f soddisfa le ipotesi del teorema di esistenza degli zeri su $[-5, 2]$. $\square$

iv) $x = -5$, $x = 0$ pt. di massimo locale per f su $[-5, 2]$;

$x = -4$, $x = 2$ pt. di minimo locale per f su $[-5, 2]$. $\square$

$$\text{v) } \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{2\sqrt{h+4} - 4}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{(2\sqrt{h+4} - 4)(2\sqrt{h+4} + 4)}{h(2\sqrt{h+4} + 4)} \\ = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{4(h+4) - 16}{h(2\sqrt{h+4} + 4)} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{4h}{h(2\sqrt{h+4} + 4)} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{-(h+1)^2 + 5 - 4}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} (-h - 2) = \underline{\underline{-2}};$$

f non è derivabile in $x_0 = 0$, poiché i due limiti calcolati sopra sono diversi. $\square$

vi) Poiché in $[-4, 0]$ abbiamo $f(x) = 2\sqrt{x+4}$, si ha

$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x+4}}$ e $f'(-3) = 1$. Quindi l'eq. della retta tangente al grafico in $(-3, 2)$ è $y = 2 + (x+3)$, ossia $y = x + 5$. $\blacksquare$

$$3) \bullet ||x^2 - 1| - 2| > 1 \Leftrightarrow |x^2 - 1| - 2 < -1 \text{ o } |x^2 - 1| - 2 > 1$$

$$\Leftrightarrow |x^2 - 1| < 1 \text{ o } |x^2 - 1| > 3$$

$$\Leftrightarrow (-1 < x^2 - 1 < 1) \text{ o } (x^2 - 1 < -3 \text{ o } x^2 - 1 > 3)$$

$$\Leftrightarrow (0 < x^2 < 2) \circ (x^2 < -2 \circ x^2 > 4)$$

$$\Leftrightarrow x \in]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[\setminus \{0\} \circ (x < -2 \circ x > 2)$$

$$\Rightarrow S =]-\infty, -2[\cup]-\sqrt{2}, 0[\cup]0, \sqrt{2}[\cup]2, +\infty[. \square$$

$$\bullet \left(\frac{1}{2}\right)^{|x+2|} \cdot 2^{x^2} < 1 \Leftrightarrow 2^{-|x+2|} \cdot 2^{x^2} < 2^0 \Leftrightarrow 2^{x^2 - |x+2|} < 2^0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - |x+2| < 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ x^2 - x - 2 < 0 \end{cases} \circ \begin{cases} x < -2 \\ x^2 + x + 2 < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ -1 < x < 2 \end{cases} \circ \begin{cases} x < -2 \\ \emptyset \end{cases} \Rightarrow S =]-1, 2[. \square$$

$$\bullet \log_{\frac{1}{3}}(4-|x|) - \log_{\frac{1}{3}}|x| \leq 1 \Leftrightarrow \log_{\frac{1}{3}}(4-|x|) + \log_{\frac{1}{3}}|x| \leq \log_{\frac{1}{3}}3$$

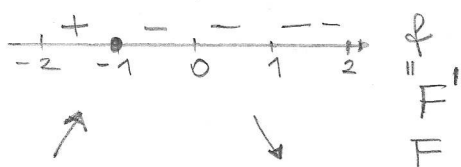
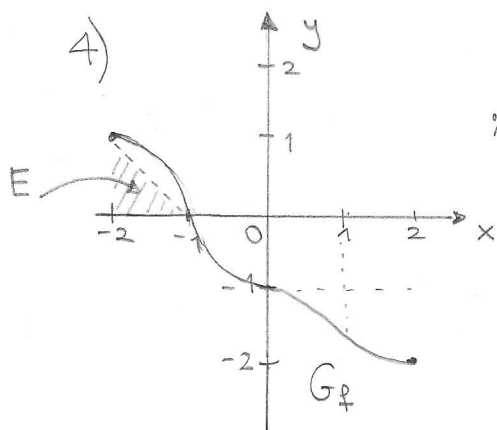
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4-|x| > 0 \\ |x| > 0 \\ (4-|x|)|x| \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4 < x < 4 \\ x \neq 0 \\ (4-|x|)|x| \leq 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -4 < x < 0 \\ (4+x)(-x) \leq 3 \end{cases} \circ \begin{cases} 0 < x < 4 \\ (4-x)x \leq 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -4 < x < 0 \\ x^2 + 4x + 3 \geq 0 \end{cases} \circ \begin{cases} 0 < x < 4 \\ x^2 - 4x + 3 \geq 0 \end{cases}$$

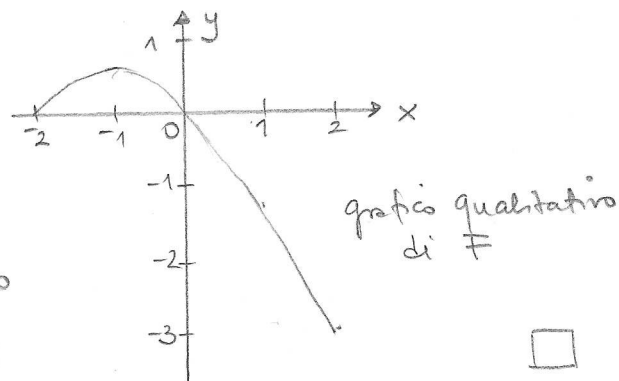
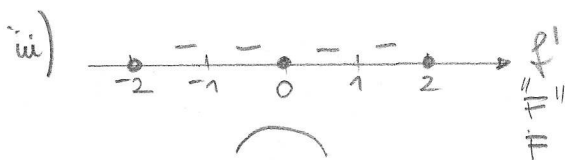
$$\Leftrightarrow \begin{cases} -4 < x < 0 \\ x \leq -3 \circ x \geq -1 \end{cases} \circ \begin{cases} 0 < x < 4 \\ x \leq 1 \circ x \geq 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow S =]-4, -3] \cup [-1, 0[\cup]0, 1] \cup [3, 4[.$$



i) Dal teorema fondamentale del calcolo integrale si ha $F'(x) = f(x) \quad \forall x \in [-2, 2]$; quindi dal segno di f si ottiene il segno di $F'(x)$; risulta che F risulta a $[-2, -1]$ è crescente, mentre è decrescente su $[-1, 2]$.

ii) $\max_{x \in [-2, 2]} F(x) = F(-1) > \text{area}(E) = \frac{1}{2}.$



iv) $[-1, 2]$ è l'intervallo contenuto in $[-2, 2]$, tale che $F|_{[-1, 2]}$ è iniettiva.

5) $f(x) = \frac{(x-1)^3}{e^x}$ i) • $\text{dom } f = \mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$

• segno di f ($e^x > 0 \forall x \in \mathbb{R}$)

• $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ $y=0$ asintoto orizz. per f , per $x \rightarrow +\infty$.

• continuità di f su $\mathbb{R}$.

• $\text{dom } f' = \mathbb{R}$ $f'(x) = 3(x-1)^2 e^{-x} - (x-1)^3 e^{-x} = e^{-x} (x-1)^2 (3-x+1) = e^{-x} (x-1)^2 (4-x)$

$x=1$, $x=4$ pt. critici per f

$x=4$ pt. di max. loc. stretto per f ;

$f(1)=0$ $f(4) = \frac{3^3}{e^4} \sim 0.5$

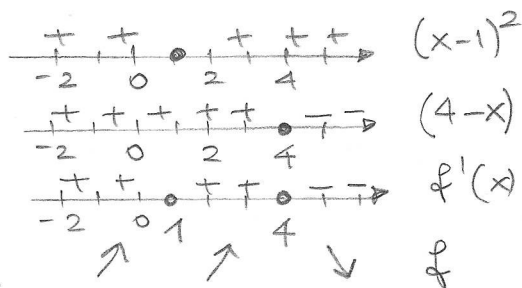
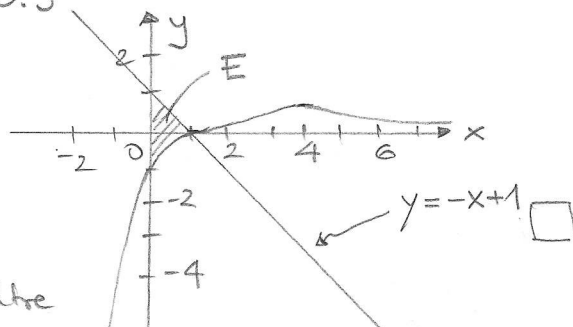


grafico qualitativo di f



ii) $F(x)$ è derivabile su $\mathbb{R}$; inoltre

$$F'(x) = [-3(x-1)^2 - 6(x-1) - 6] e^{-x} + e^{-x} [(x-1)^3 + 3(x-1)^2 + 6(x-1) + 6] = (x-1)^3 e^{-x} = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

iii) $\text{area}(E) = \int_0^1 (-x + 1 - f(x)) dx = \left[-\frac{x^2}{2} + x \right]_0^1 - \int_0^1 f(x) dx =$

-5-

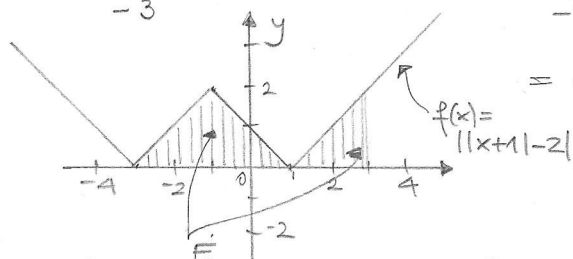
$$= \left(-\frac{1}{2} + 1\right) - (F(1) - F(0)) = \frac{1}{2} - F(1) + F(0)$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{6}{e} + (1 - 3 + \cancel{6} - \cancel{6}) = \underline{\underline{-\frac{3}{2} + \frac{6}{e}}}$$

6) 5! 15!

FILA (B)

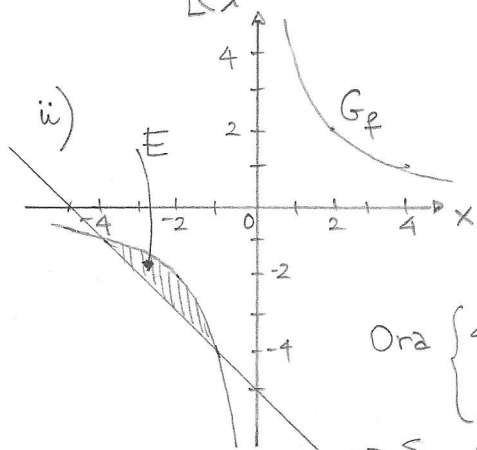
1) i) $\int_{-3}^3 (||x+1|-2|-1) dx = \int_{-3}^3 ||x+1|-2| dx - \int_{-3}^3 1 dx =$



$$= \text{area}(E) - [x]_{-3}^3 = \frac{4 \cdot \cancel{2}}{\cancel{2}} + \frac{2 \cdot \cancel{2}}{\cancel{2}} - 6 = \underline{\underline{0}}$$

$$\int_1^2 \frac{x^4 + 3\sqrt[3]{x-1}}{x} dx = \int_1^2 (x^3 + 3x^{-2/3} - \frac{1}{x}) dx = \left[\frac{x^4}{4} + 3 \cdot \frac{x^{1/3}}{1/3} - \log|x| \right]_1^2$$

$$= \left[\left(\frac{16}{4} + 9\sqrt[3]{2} - \log 2 \right) - \left(\frac{1}{4} + 3 \right) \right] = \underline{\underline{-\frac{21}{4} + 9\sqrt[3]{2} - \log 2}}$$



$$f(x) = \frac{4}{x}$$

$$y = -x - 5$$

I punti di intersezione soddisfano $\begin{cases} \frac{4}{x} = -x - 5 \\ y = -x - 5 \end{cases}$

Ora $\begin{cases} 4 = -x^2 - 5x \\ y = -x - 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 5x + 4 = 0 \\ y = -x - 5 \end{cases}$

$$\Rightarrow S_1 = (-4, -1), \quad S_2 = (-1, -4)$$

Quindi $\text{area}(E) = \int_{-4}^{-1} \left(\frac{4}{x} - (-x-5) \right) dx = \int_{-4}^{-1} \left(\frac{4}{x} + x + 5 \right) dx =$

$$= \left[4 \log|x| + \frac{x^2}{2} + 5x \right]_{-4}^{-1} = \left[\left(\frac{1}{2} - 5 \right) - \left(4 \log 4 + 8 - 20 \right) \right] =$$

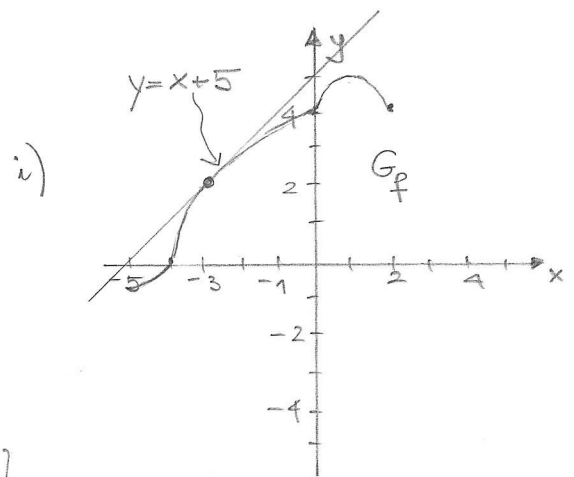
$$= \underline{\underline{\frac{15}{2} - 4 \log 4}}$$

$$\begin{aligned}
 \text{iii)} \quad & \int_0^1 \frac{1}{x+3} dx + \int_0^1 \frac{1}{(x+3)^2} dx + \int_0^1 \frac{1}{(x+3)^3} dx = \\
 & = \left[\log|x+3| \right]_0^1 + \left[\frac{(x+3)^{-1}}{-1} \right]_0^1 + \left[\frac{(x+3)^{-2}}{-2} \right]_0^1 = \\
 & = (\log 4 - \log 3) - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{16} - \frac{1}{9} \right) = \log \frac{4}{3} + \frac{1}{12} + \frac{7}{16 \cdot 9 \cdot 2} \\
 & = \log \frac{4}{3} + \frac{31}{288}
 \end{aligned}$$

$$\text{iv)} \quad \sum_{n=1}^{10} (-1)^n \frac{x_{3n}}{(n-1)!}$$

$$2) f: [-5, 2] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x} - \frac{1}{4} & \text{se } -5 \leq x \leq -4 \\ 2\sqrt{x+4} & \text{se } -4 < x \leq 0 \\ -(x-1)^2 + 5 & \text{se } 0 < x \leq 2. \end{cases}$$



$$\text{ii)} \quad \left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -4^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -4^-} \left(-\frac{1}{x} - \frac{1}{4} \right) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -4^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -4^+} 2\sqrt{x+4} = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -4} f(x) = 0. \text{ Poiché } f(-4) = 0, \\
 \text{risulta che } f \text{ è continua in } x = -4.$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} 2\sqrt{x+4} = 4 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} [-(x-1)^2 + 5] = 4 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 4. \text{ Poiché } f(0) = 4, \\
 \text{risulta che } f \text{ è continua in } x = 0.$$

iii) f è continua su $[-5, 2]$ essendo a tratti una funzione continua e per ii) f è anche continua in $x = -4$ e $x = 0$.

Poiché inoltre $f(-5) = \frac{1}{5} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{20} < 0$ e $f(2) = 4 > 0$, si ha che f soddisfa le ipotesi del teorema di esistenza degli zeri in $[-5, 2]$.

iv) $x = 1$ pt. di massimo locale per f su $[-5, 2]$;

$x = -5, x = 2$ pt. di minimo locale per f su $[-5, 2]$. $\square$

$$\text{v)} \quad \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \frac{1}{2} \quad (\text{vedi FilA(A), Es. 2) v)}).$$

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{-(h-1)^2 + 5 - 4}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} [-h + 2] = \underline{2};$$

f non è derivabile in $x_0 = 0$, poiché i due limiti calcolati sopra sono diversi. □

vi) $y = x + 5$ (vedi F.L.A. (A), Es. 2 vi)) ■

3) • $||x^2 - 1| - 2| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq |x^2 - 1| - 2 \leq 1$

$$\Leftrightarrow 1 \leq |x^2 - 1| \leq 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 1 \leq -1 \text{ o } x^2 - 1 \geq 1 \\ -3 \leq x^2 - 1 \leq 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 \leq 0 \text{ o } x^2 \geq 2 \\ -2 \leq x^2 \leq 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ o } x \leq -\sqrt{2} \text{ o } x \geq \sqrt{2} \\ -2 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \underline{S = [-2, -\sqrt{2}] \cup \{0\} \cup [\sqrt{2}, 2]}.$$
 □

• $\left(\frac{1}{3}\right)^{|x+2|} \cdot 3^{x^2} > 1 \Leftrightarrow 3^{-|x+2|} \cdot 3^{x^2} > 3^0 \Leftrightarrow 3^{x^2 - |x+2|} > 3^0$

$$\Leftrightarrow \underset{3^x \uparrow}{x^2 - |x+2| > 0} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ x^2 - x - 2 > 0 \end{cases} \text{ o } \begin{cases} x < -2 \\ x^2 + x + 2 > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ x < -1 \text{ o } x > 2 \end{cases} \text{ o } \begin{cases} x < -2 \\ \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow \underline{S =]-\infty, -1[\cup]2, +\infty[}$$

• $\log_4(5 - |x|) - \log_{1/4}|x| \leq 1 \Leftrightarrow \log_4(5 - |x|) + \log_4|x| \leq \log_4 4$

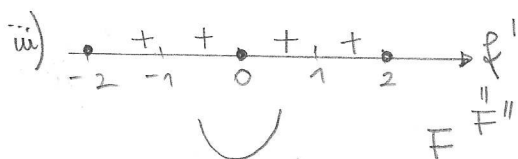
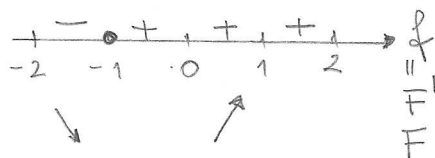
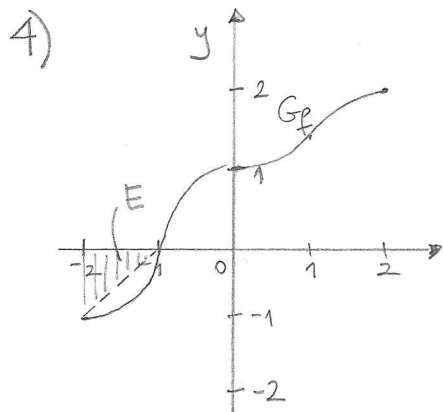
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5 - |x| > 0 \\ |x| > 0 \\ (5 - |x|)|x| \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5 < x < 5 \\ x \neq 0 \\ (5 - |x|)|x| \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -5 < x < 0 \\ (5 + x)(-x) \leq 4 \end{cases} \text{ o } \begin{cases} 0 < x < 5 \\ (5 - x)x \leq 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -5 < x < 0 \\ x^2 + 5x + 4 \geq 0 \end{cases} \text{ o } \begin{cases} 0 < x < 5 \\ x^2 - 5x + 4 \geq 0 \end{cases}$$

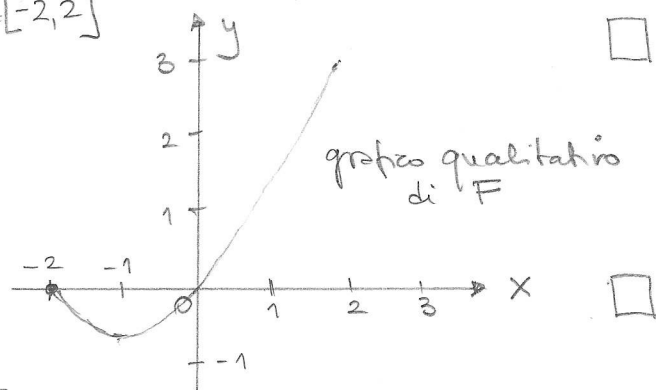
$$\Leftrightarrow \begin{cases} -5 < x < 0 \\ x \leq -4 \text{ o } x \geq -1 \end{cases} \text{ o } \begin{cases} 0 < x < 5 \\ x \leq 1 \text{ o } x \geq 4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \underline{S =]-5, -4] \cup [-1, 0[\cup]0, 1] \cup [4, 5[}.$$
 ■



i) Dal teorema fondamentale del calcolo integrale si ha $F'(x) = f(x) \forall x \in [-2, 2]$; quindi dal segno di f si ottiene il segno di $F'(x)$; risulta che F è decrescente su $[-2, -1]$ e crescente su $[-1, 2]$. $\square$

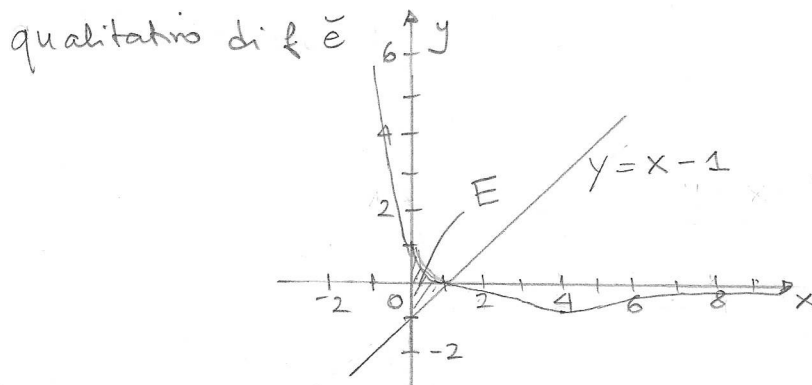
ii) $\min_{x \in [-2, 2]} F(x) = F(-1) < -\text{area}(E) = -\frac{1}{2}$ $\square$



iv) $[-1, 2]$ è il più grande intervallo contenuto in $[-2, 2]$, tale che $F|_{[-1, 2]}$ è iniettiva. $\blacksquare$

5) $f(x) = -\frac{(x-1)^3}{e^x}$

Questa funzione è - la funzione studiata in FILA (A), es. 5) i). Quindi il grafico qualitativo di f è



ii) Si verifica analog, come fatto in FILA (A), es. 5) ii). $\square$

iii) $\text{area}(E) = \int_0^1 (f(x) - x + 1) dx = F(1) - F(0) - \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 + x \Big|_0^1$
 $= \frac{6}{e} - (-1 + 3 - \cancel{6} + \cancel{6}) - \frac{1}{2} + 1 = \frac{6}{e} - \frac{3}{2}$ $\blacksquare$

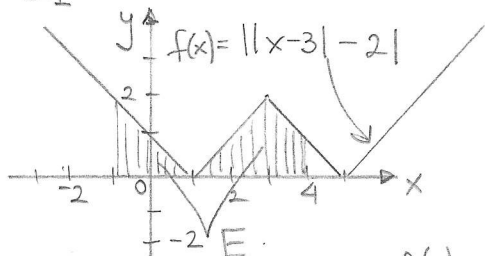
6) 4! 21!.

FILA (C)

$$1) i) \int_1^2 \frac{x^4 - 2\sqrt[3]{x} + x}{x^2} dx = \int_1^2 (x^2 - 2x^{-5/3} + \frac{1}{x}) dx = \left[\frac{x^3}{3} - 2 \frac{x^{-2/3}}{-2/3} + \log|x| \right]_1^2$$

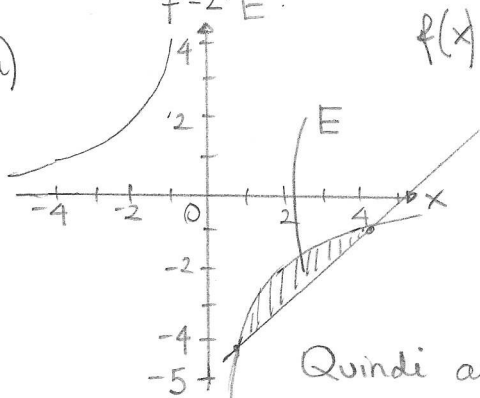
$$= \left[\left(\frac{8}{3} + 3 \cdot 2^{-2/3} + \log 2 \right) - \left(\frac{1}{3} + 3 \right) \right] = -\frac{2}{3} + \frac{3}{\sqrt[3]{4}} + \log 2.$$

$$\int_{-1}^4 (|11x-3| - 2) dx + \int_{-1}^4 1 dx = \text{area}(E) + [x]_{-1}^4 =$$



$$= 2 + \frac{7}{2} + 5 = \frac{21}{2}$$

ii)



$$f(x) = -\frac{4}{x} \quad y = x - 5$$

I punti di intersezione soddisfano

$$\begin{cases} -\frac{4}{x} = x - 5 \\ y = x - 5 \end{cases} \Rightarrow S_1 = (1, -4) \quad S_2 = (4, -1).$$

$$\text{Quindi } \text{area}(E) = \int_1^4 \left(-\frac{4}{x} - x + 5 \right) dx =$$

$$= \left[-4 \log|x| - \frac{x^2}{2} + 5x \right]_1^4 = \frac{15}{2} - 4 \log 4.$$

$$iii) \int_{-1}^0 \frac{2x}{x^2+1} dx + \int_{-1}^0 \frac{2x}{(x^2+1)^2} dx + \int_{-1}^0 \frac{2x}{(x^2+1)^3} dx =$$

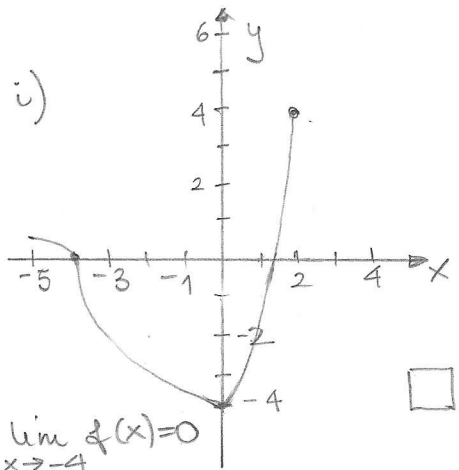
$$\log(x^2+1) \Big|_{-1}^0 + \frac{(x^2+1)^{-1}}{-1} \Big|_{-1}^0 + \frac{(x^2+1)^{-2}}{-2} \Big|_{-1}^0 =$$

$$= (\log 1 - \log 2) - \left(1 - \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{4} \right) = -\log 2 - \frac{7}{8}.$$

$$iv) \sum_{n=1}^{15} (-1)^n \frac{x_{2n}}{(n+1)!}.$$

2) $f: [-5, 2] \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{4} & \text{se } -5 \leq x < -4 \\ -2\sqrt{x+4} & \text{se } -4 \leq x \leq 0 \\ (x+1)^2 - 5 & \text{se } 0 < x \leq 2 \end{cases}$$



ii) $\lim_{x \rightarrow -4^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -4^-} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{4} \right) = 0$
 $\lim_{x \rightarrow -4^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -4^+} (-2\sqrt{x+4}) = 0$ $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow -4} f(x) = 0$
 Poiché inoltre $f(-4) = 0$, risulta che f è continua in $x = -4$. $\square$

$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-2\sqrt{x+4}) = -4$
 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} [(x+1)^2 - 5] = -4$ $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -4$. Poiché inoltre $f(0) = -4$, risulta che f è continua in $x = 0$. $\square$

iii) f è continua su $[-5, 2]$ essendo a tratti una funzione continua e per ii) f è anche continua in $x = -4$ e $x = 0$.

Osserviamo però che $f(-5) = -\frac{1}{5} + \frac{1}{4} = \frac{1}{20} > 0$ e $f(2) = 4 > 0$, si ha che f non soddisfa le ipotesi del teorema di esistenza degli zeri su $[-5, 2]$. $\square$

iv) $x = -5$, $x = 2$ pt. di massimo locale per f su $[-5, 2]$;

$x = 0$ pt. di minimo locale per f su $[-5, 2]$. $\square$

v) $\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-2\sqrt{h+4} + 4}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{(-2\sqrt{h+4} + 4)(2\sqrt{h+4} + 4)}{h(2\sqrt{h+4} + 4)}$
 $= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-4(h+4) + 16}{h(2\sqrt{h+4} + 4)} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-4h}{h(2\sqrt{h+4} + 4)} = -\frac{1}{2}$

$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{(h+1)^2 - 5 + 4}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} (h+2) = 2$

f non è derivabile in $x_0 = 0$, poiché i due limiti calcolati sopra sono diversi. $\square$

vi) Poiché in $[-4, 0]$ abbiamo $f(x) = -2\sqrt{x+4}$, si ha

$f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{x+4}}$ e $f'(-3) = -1$. Quindi l'eq. della retta tangente al grafico in $(-3, -2)$ è $y = -2 - (x+3)$, ossia $y = -x - 5$. 

3) • $||x^2-1|-1| > 2 \Leftrightarrow |x^2-1|-1 < -2 \text{ o } |x^2-1|-1 > 2$

$\Leftrightarrow |x^2-1| < \overset{\text{impossibile}}{-1} \text{ o } |x^2-1| > 3$

$\Leftrightarrow x^2-1 < -3 \text{ o } x^2-1 > 3$

$\Leftrightarrow x^2 < \underset{\text{impossibile}}{-2} \text{ o } x^2 > 4$

$S =]-\infty, -2[\cup]2, +\infty[$. 

• $\left(\frac{1}{2}\right)^{|x+2|} \cdot 2^{x^2} \leq 1 \Leftrightarrow 2^{-|x+2|} \cdot 2^{x^2} \leq 2^0 \Leftrightarrow 2^{x^2-|x+2|} \leq 2^0$

$\Leftrightarrow \underset{2^x \nearrow}{x^2-|x+2|} \leq 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ x^2-x-2 \leq 0 \end{cases} \text{ o } \begin{cases} x < -2 \\ x^2+x+2 \leq 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ -1 \leq x \leq 2 \end{cases} \text{ o } \begin{cases} x < -2 \\ \emptyset \end{cases} \Rightarrow \underline{S = [-1, 2]}. $

• $\log_4(5-|x|) - \log_{1/4}|x| > 1 \Leftrightarrow \log_4(5-|x|) + \log_4|x| > \log_4 4$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 5-|x| > 0 \\ |x| > 0 \\ (5-|x|)|x| > 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5 < x < 5 \\ x \neq 0 \\ (5-|x|)|x| > 4 \end{cases} \Leftrightarrow$

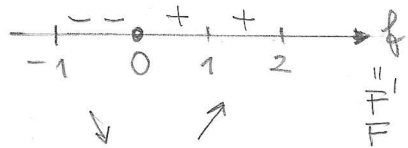
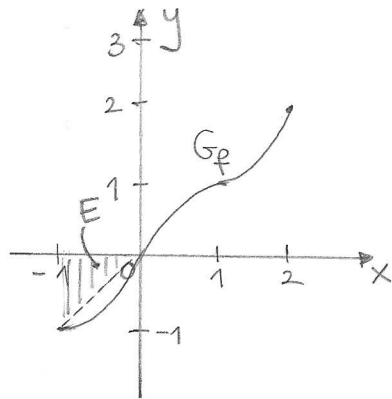
$\Leftrightarrow \begin{cases} -5 < x < 0 \\ (5+x)(-x) > 4 \end{cases} \text{ o } \begin{cases} 0 < x < 5 \\ (5-x)x > 4 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -5 < x < 0 \\ x^2+5x+4 < 0 \end{cases} \text{ o } \begin{cases} 0 < x < 5 \\ x^2-5x+4 < 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -5 < x < 0 \\ -4 < x < -1 \end{cases} \text{ o } \begin{cases} 0 < x < 5 \\ 1 < x < 4 \end{cases}$

$\Rightarrow S =]-4, -1[\cup]1, 4[$. 

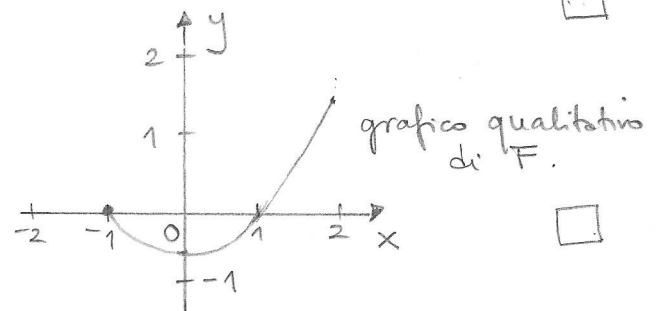
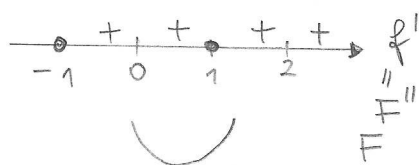
4)



i) Dal teorema fondamentale del calcolo integrale si ha $F'(x) = f(x) \forall x \in [-1, 2]$; quindi dal segno di f si ottiene il segno di $F'(x)$; risulta che F risulta a $[-1, 0]$ è decrescente, mentre è crescente su $[0, 2]$. $\square$

ii) $\min_{x \in [-1, 2]} F(x) = F(0) < -\text{area}(E) < -\frac{1}{2}$ $\square$

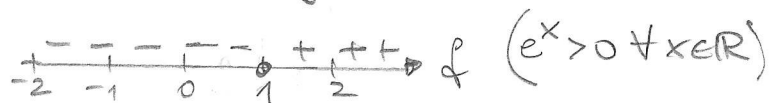
iii)



iv) $[0, 2]$ è il più grande intervallo contenuto in $[-1, 2]$ tale che $F|_{[0, 2]}$ è iniettiva. $\blacksquare$

5) $f(x) = (x-1)^3 e^x$

- $\text{dom } f = \mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$
- segno di f



- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ $y = 0$ asintoto orizzontale per f , per $x \rightarrow -\infty$.
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

- continuità di f su $\mathbb{R}$ (composizione, prodotto di fnc. continue).

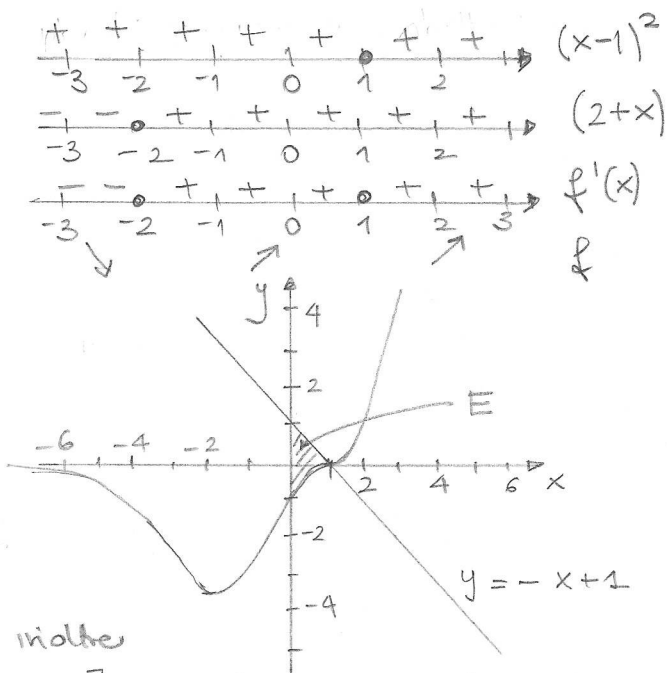
• $\text{dom } f' = \mathbb{R}$ $f'(x) = 3(x-1)^2 e^x + (x-1)^3 e^x$
 $= (x-1)^2 e^x (3 + x - 1)$
 $= (x-1)^2 (2+x) e^x$

$x = 1, x = -2$ pt. critici per f .

$x = -2$ pt. di minimo
loc. stretto per f

$$f(-2) = (-3)^3 e^{-2} = -\frac{27}{e^2} \approx -3.7$$

grafico qualitativo
di f



ii) $F(x)$ è derivabile su $\mathbb{R}$; inoltre

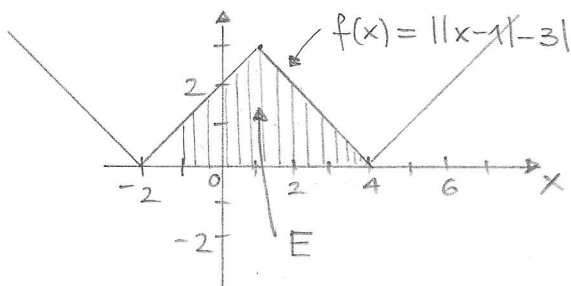
$$F'(x) = [3(x-1)^2 - 6(x-1) + 6]e^x + [(x-1)^3 - 3(x-1)^2 + 6(x-1) - 6]e^x = (x-1)^3 e^x \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$\begin{aligned} \text{iii) } \text{area}(E) &= \int_0^1 (-x+1 - f(x)) dx = \left[-\frac{x^2}{2} + x \right]_0^1 - \int_0^1 f(x) dx = \\ &= \frac{1}{2} - F(1) + F(0) = \frac{1}{2} - [-6e] + [-1 - 3 - 6 - 6] \\ &= \frac{1}{2} + 6e - 16 = \underline{\underline{6e - \frac{31}{2}}}. \end{aligned}$$

6) 7! 18!

FILA (D)

$$1) i) \int_{-1}^4 (||x-1|-3|+2) dx = \int_{-1}^4 ||x-1|-3| dx + [2x]_{-1}^4 =$$



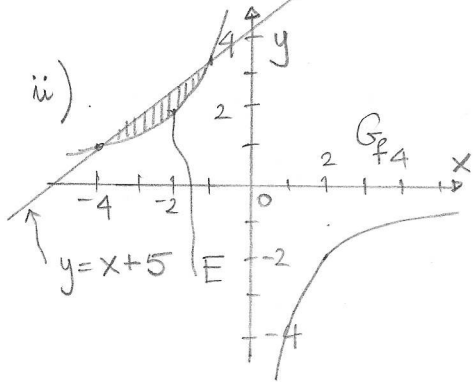
$$\begin{aligned} &= \text{area}(E) + 8 + 2 = \\ &= \frac{17}{2} + 10 = \underline{\underline{\frac{37}{2}}}. \end{aligned}$$

-14-

$$\int_1^2 \frac{x^3 + 2\sqrt[3]{x} + x}{x^2} dx = \int_1^2 \left(x + 2x^{-5/3} + \frac{1}{x} \right) dx =$$

$$= \left[\frac{x^2}{2} + 2 \frac{x^{-2/3}}{-2/3} + \log|x| \right]_1^2 = \left(2 - 3 \cdot 2^{-2/3} + \log 2 \right) - \left(\frac{1}{2} - 3 \right)$$

$$= \left(2 - \frac{3}{\sqrt[3]{4}} + \log 2 \right) + \frac{5}{2} = \frac{9}{2} - \frac{3}{\sqrt[3]{4}} + \log 2. \quad \square$$



Risulta (vedi gli altri esercizi 1ii))

che

$$\text{area}(E) = \int_{-4}^{-1} \left(x + 5 + \frac{4}{x} \right) dx = \left[\frac{x^2}{2} + 5x + 4 \log|x| \right]_{-4}^{-1}$$

$$= \left(\frac{1}{2} - 5 + 4 \log 1 \right) - \left(8 - 20 + 4 \log 4 \right)$$

$$= \frac{15}{2} - 4 \log 4. \quad \square$$

iii)

$$\int_0^1 \frac{3}{3x+1} dx + \int_0^1 \frac{3}{(3x+1)^2} dx + \int_0^1 \frac{3}{(3x+1)^3} dx =$$

$$= \left[\log|3x+1| \right]_0^1 + \left(\frac{3x+1}{-1} \right) \Big|_0^1 + \left(\frac{3x+1}{-2} \right) \Big|_0^1 =$$

$$= \log 4 - \left(\frac{1}{4} - 1 \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{16} - 1 \right) = \log 4 + \frac{3}{4} + \frac{15}{32}$$

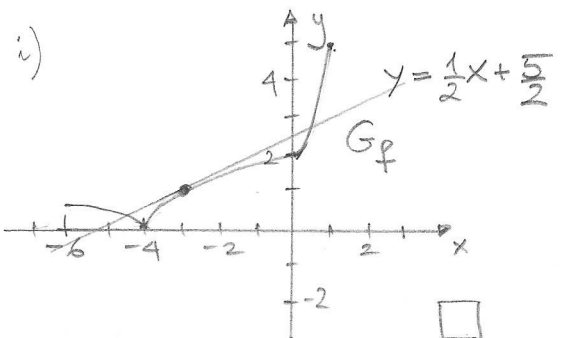
$$= \log 4 + \frac{39}{32}. \quad \square$$

iv)

$$\sum_{n=1}^{15} (-1)^n \frac{x_{2n}}{(n-1)!}$$

2) $f: [-6, 1] \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} +\frac{1}{x} + \frac{1}{4} & \text{se } -6 \leq x < -4 \\ \sqrt{x+4} & \text{se } -4 \leq x \leq 0 \\ (x+1)^2 + 1 & \text{se } 0 < x \leq 1 \end{cases}$$



$$\text{ii)} \left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -4^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -4^-} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{4} \right) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -4^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -4^+} \sqrt{x+4} = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -4} f(x) = 0. \text{ Poiché inoltre } f(-4) = 0, \text{ si ha che } f \text{ è continua in } x = -4.$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \sqrt{x+4} = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} [(x+1)^2 + 1] = 2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2. \text{ Poiché inoltre } f(0) = 2, \text{ si ha } f \text{ è continua in } x = 0. \square$$

iii) f risulta continua su $[-6, 1]$. Poiché $f(-6) = -\frac{1}{6} + \frac{1}{4} = \frac{1}{12} > 0$, $f(1) = 5 > 0$, si ha che f non soddisfa le ipotesi del teorema di esistenza degli zeri su $[-6, 1]$. $\square$

iv) $x = -6, x = 1$ pt. di massimo locale per f su $[-6, 1]$;
 $x = -4$ pt. di minimo locale per f su $[-6, 1]$. $\square$

$$\text{v)} \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{h+4} - 2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{(\sqrt{h+4} - 2)(\sqrt{h+4} + 2)}{h(\sqrt{h+4} + 2)} \\ = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{h + 4 - 4}{h(\sqrt{h+4} + 2)} = \frac{1}{4}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{(h+1)^2 + 1 - 2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} (h+2) = 2;$$

f non è derivabile in $x_0 = 0$, poiché i due limiti calcolati sopra sono diversi. $\square$

vi) Poiché in $[-4, 0]$ abbiamo $f(x) = \sqrt{x+4}$, si ha $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+4}}$ e $f'(-3) = \frac{1}{2}$. Quindi l'eq. della retta tangente al grafico in $(-3, 1)$ è $y = 1 + \frac{1}{2}(x+3)$, ossia $y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$. $\blacksquare$

$$\begin{aligned} 3) \bullet | |x^2 - 1| - 2 | &\leq 2 \Leftrightarrow -2 \leq |x^2 - 1| - 2 \leq 2 \Leftrightarrow 0 \leq |x^2 - 1| \leq 4 \\ &\Leftrightarrow -4 \leq x^2 - 1 \leq 4 \Leftrightarrow -3 \leq x^2 \leq 5 \\ &\quad \text{sempre} \quad \text{sempre} \\ &\Rightarrow \underline{\underline{S = [-\sqrt{5}, \sqrt{5}]} } . \quad \square \end{aligned}$$

$$\bullet \left(\frac{1}{3}\right)^{|x+2|} \cdot 3^{x^2} \geq 1 \Leftrightarrow 3^{-|x+2|+x^2} \geq 3^0 \Leftrightarrow x^2 - |x+2| \geq 0$$

$$\Rightarrow \underline{S =]-\infty, -1] \cup [2, +\infty[} \quad (\text{vedi FILA (B), Es. 3}).$$

$$\bullet \log_3(4-|x|) - \log_{1/3}|x| > 1 \Leftrightarrow \log_3(4-|x|) + \log_3|x| > 1$$

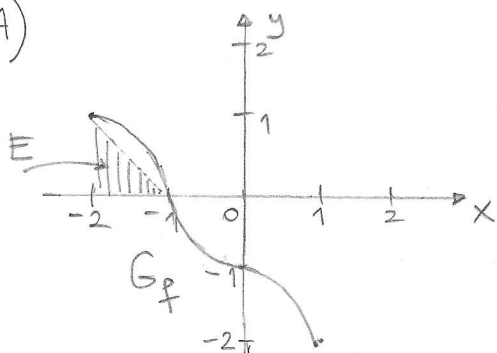
$$\Leftrightarrow \log_3(4-|x|) + \log_3|x| > \log_3 3$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -4 < x < 4 \\ x \neq 0 \\ (4-|x|)|x| > 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4 < x < 0 \\ (4+x)(-x) > 3 \end{cases} \circ \begin{cases} 0 < x < 4 \\ (4-x)x > 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -4 < x < 0 \\ x^2 + 4x + 3 < 0 \end{cases} \circ \begin{cases} 0 < x < 4 \\ x^2 - 4x + 3 < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -4 < x < 0 \\ -3 < x < -1 \end{cases} \circ \begin{cases} 0 < x < 4 \\ 1 < x < 3 \end{cases} \Rightarrow \underline{S =]-3, -1[\cup]1, 3[}.$$

4)



i) Procedendo come in FILA (A), Es. 4, si ha che F è crescente ristretta a $[-2, -1]$, mentre è decrescente su $[-1, 1]$. $\square$

ii) segue inoltre

$$\max_{x \in [-2, 1]} F(x) = F(-1) > \text{area}(E) = \frac{1}{2} \quad \square$$

iii) Inoltre si ha

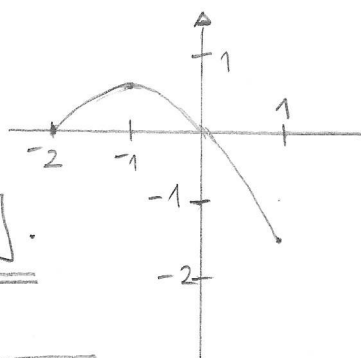


grafico qualitativo di F .

iv) $\underline{[a, b] = [-1, 1]}$. $\square$

5) $\boxed{f(x) = -(x-1)^3 e^x}$

Questa funzione è la funzione studiata in FILA (C), es. 5 i) ii) iii). $\square$

6) 6! 16! $\square$