

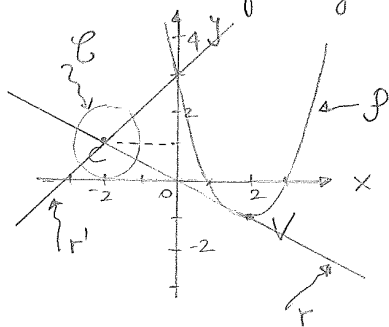
Università di Trento - Dip. di Psicologia e Scienze Cognitive
 CdL in Scienze e Tecniche di Psicologia Cognitiva
 ESAME SCRITTO DI ANALISI MATEMATICA
 a.a. 2013-2014 - Trento, 11 settembre 2014

FILA (A)

1) $y = x^2 - 4x + 3 \Leftrightarrow y = (x-2)^2 - 1$ $V = (2, -1)$

$x^2 + 4x + y^2 - 2y + 4 = 0 \Leftrightarrow (x+2)^2 - 1 + (y-1)^2 - 1 + 4 = 0$

$\Leftrightarrow (x+2)^2 + (y-1)^2 = 1$ $C = (-2, 1)$



i) $r: \frac{y-1}{-1-1} = \frac{x+2}{2+2} \Leftrightarrow y-1 = -\frac{1}{2}(x+2)$

$\Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}x$

□

ii) $r': y = 1 + m(x+2) \Leftrightarrow y = mx + 2m + 1$

$\text{area}(E) = \frac{\text{base} \cdot \text{altezza}}{2} = \frac{(2m+1) \cdot \cancel{2}}{\cancel{2}}$; quindi

$2m+1 = 3 \Leftrightarrow 2m = 2 \Rightarrow m = 1$; quindi $y = x + 3$

è l'eq. della retta r' .

□

2) $\int_1^4 \frac{x^2+1}{\sqrt{x}} dx = \int_1^4 [x^{\frac{3}{2}} + x^{-\frac{1}{2}}] dx = \left[\frac{2x^{\frac{5}{2}}}{5} + 2x^{\frac{1}{2}} \right]_1^4 = \frac{2}{5} \cdot 32 + 2 \cdot 2 - \frac{2}{5} - 2$
 $= \frac{62}{5} + 2 = \frac{72}{5}$

$\int_{-1}^1 (2x+1)^5 dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 2(2x+1)^5 dx = \frac{1}{2} \left[\frac{(2x+1)^6}{6} \right]_{-1}^1 = \frac{1}{12} (3^6 - (-1)^6) = \frac{1}{12} (3^6 - 1)$

□

iii) $\frac{e^x \cdot e^{|x|}}{e^{x^2}} > 1 \Leftrightarrow e^{x+|x|-x^2} > e^0 \Leftrightarrow x+|x|-x^2 > 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 2x - x^2 > 0 \end{cases} \cup \begin{cases} x < 0 \\ -x^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 - 2x < 0 \end{cases} \cup \begin{cases} x < 0 \\ \emptyset \end{cases}$

$S =]0, 2[$

$2x|x+1| - x^2 \geq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 \geq 0 \\ 2x^2 + 2x - x^2 \geq 1 \end{cases} \cup \begin{cases} x+1 < 0 \\ -2x^2 - 2x - x^2 \geq 1 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x^2 + 2x - 1 \geq 0 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} x < -1 \\ 3x^2 + 2x + 1 \leq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x \leq -1 - \sqrt{2} \vee x \geq -1 + \sqrt{2} \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} x < -1 \\ \emptyset \end{cases} \quad S = [-1 + \sqrt{2}, +\infty[.$$

□

iii) Dal teorema fondamentale del calcolo integrale si ottiene

$$\text{che } F'(x) = \frac{x^2 - 2x}{e^x} \quad \forall x \in [-1, 5]; \quad F'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2. \quad \text{I pt. critici di } F \text{ sono dunque } \underline{x \in \{0, 2\}}.$$

■

3) i) $x = -3$ pt. di min. loc. stretto di f in $\mathbb{R}$;

$x = 1$ pt. di max. loc. stretto di f in $\mathbb{R}$.

□

ii) $y = 2$ asintoto orizzontale per f , per $x \rightarrow -\infty$ ($\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$);

$y = 0$ " " " per $x \rightarrow +\infty$ ($\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$);

$x = -1$ asintoto verticale per f ($\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = +\infty$);

$x = 1$ " " ($\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty$).

□

iii) f ristretta a $]-\infty, -3]$ è decrescente;

f " a $[-3, -1[$ è crescente;

f " a $]-1, 1]$ è crescente;

f " a $]1, +\infty[$ è crescente.

□

iv) $(f \circ g)(0) = \underline{1}$, poiché $g(0) = 0$ e $f(0) = 1$;

$(g \circ f)(1) = \underline{3}$, poiché $f(1) = 3$, ma $3 \notin \text{dom } g$ e quindi non è definito $g(3)$;

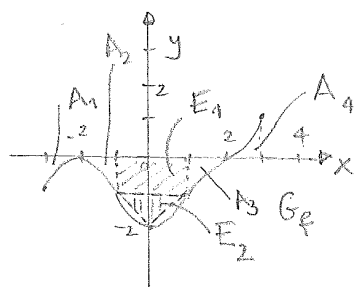
$(f \circ g)(1) = \underline{0}$, poiché $f(1) = 3$ e $g(1) = 0$.

□

$$v) \sum_{n=1}^{10} g\left(\frac{2}{n}\right) = g(2) + g(1) + g\left(\frac{2}{3}\right) + \dots + g\left(\frac{1}{10}\right) = \underline{1}.$$

■

4)



$$i) F(-2) = \int_{-2}^{-1} f(t) dt = -\text{area}(A_1)$$

$$F(-1) = \int_{-3}^{-1} f(t) dt = -\text{area}(A_1) - \text{area}(A_2)$$

$$F(1) < -\text{area}(A_1) - \text{area}(A_2) - \text{area}(E_1) - \text{area}(E_2) \\ = -\text{area}(A_1) - \text{area}(A_2) - 3 < -3$$

$$F(2) = F(1) - \text{area}(A_3) < -3.$$

$$\underset{x \in [-3, 3]}{\min} F(x)$$

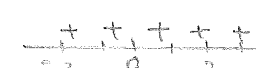
□

ii) F è strett. decrescente su $[-3, 2]$ e strett. crescente su $[2, 3]$ (us. interpret. geometrica oppure osservando che $F'(x) = f(x)$ su $[-3, 3]$ con f ). Inoltre $F(3) < 0$.

Quindi l'unico zero di F è $x = -3$.

■

5) $f(x) = 3 \log(x^2 + e)$ i) • $\text{dom } f = \mathbb{R}_1 =]-\infty, +\infty[$;

• segue da f  f

poiché $x^2 + e \geq e \quad \forall x \in \mathbb{R}_1$ e

$$\log(x^2 + e) \geq \log e = 1;$$

• $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$;

• continuità di f su $\mathbb{R}_1$;

• $\text{dom } f' = \mathbb{R}_1$

$$f'(x) = \frac{6x}{x^2 + e}$$



$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ pt. critico di f
 $x = 0$ è pt. min. loc. scelto per f

$$\underline{f(0) = 3};$$

• $\text{dom } f'' = \mathbb{R}_1$

$$f''(x) = \frac{6(x^2 + e) - 6x(2x)}{(x^2 + e)^2} = \frac{6(e - x^2)}{(x^2 + e)^2}$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x_{1/2} = \pm \sqrt{e}$$

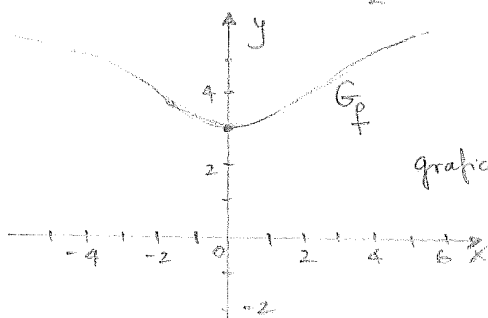
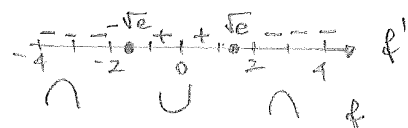


grafico qualitativo di f

□

ii) $y=3$ eq. retta tangente al grafico di f in $x=0$. □

iii)

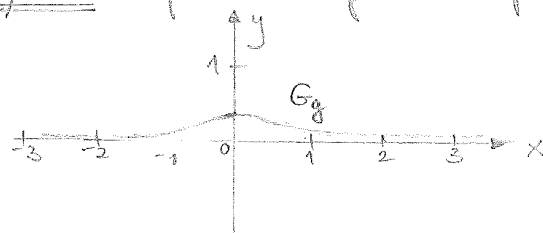


grafico qualitativo della funzione

$$g(x) = \frac{1}{f(x)}$$

□

iv) $\max_{x \in \mathbb{R}} g(x) = \underline{\underline{\frac{1}{3}}}$. ■

6) $D_{n,2} + C_{n,2} = 18 \Leftrightarrow$

$$\frac{n!}{(n-2)!} + \frac{n!}{(n-2)!2!} = 18$$

$$\Leftrightarrow n(n-1) + \frac{n(n-1)}{2} = 18$$

$$\Leftrightarrow 3n(n-1) = 36 \Leftrightarrow n^2 - n - 12 = 0$$

$$\Leftrightarrow n_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+48}}{2} = \frac{1 \pm 7}{2} \begin{matrix} 4 \\ 3 \end{matrix}$$

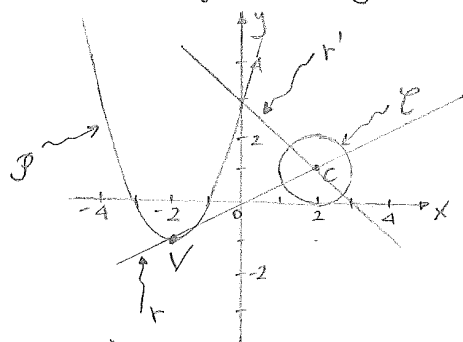
$n=4$ è la soluzione cercata. ■

FLA (B)

1) $y = x^2 + 4x + 3 \Leftrightarrow y = (x+2)^2 - 1$ $V = (-2, -1)$

$$x^2 + y^2 - 4x - 2y + 4 = 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 - 1 + (y-1)^2 - 1 + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)^2 + (y-1)^2 = 1 \quad \underline{\underline{C = (2, 1)}}$$



i) $r: \frac{y-1}{-1-1} = \frac{x-2}{-2-2} \Leftrightarrow y-1 = \frac{1}{2}(x-2)$

$$\Leftrightarrow \underline{\underline{y = \frac{1}{2}x}}$$

□

ii) $r': y = 1 + m(x-2) \Leftrightarrow y = mx - 2m + 1$

$$\text{area}(E) = \frac{\text{base} \cdot \text{altezza}}{2} = \frac{(-2m+1) \cdot \frac{1}{2}}{2}; \text{ quindi}$$

$$-2m+1 = 3 \Leftrightarrow m = -1; \text{ quindi } \underline{\underline{y = -x + 3}}$$

è l'eq. della retta r' . ■

$$2) i) \cdot \int_1^4 \frac{x^2-1}{\sqrt{x}} dx = \int_1^4 [x^{\frac{3}{2}} - x^{-\frac{1}{2}}] dx = \left[\frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} - 2x^{\frac{1}{2}} \right]_1^4 = \frac{2}{5} \cdot 32 - 2 \cdot 2 - \frac{2}{5} + 2$$

$$= \frac{62}{5} - 2 = \frac{52}{5}.$$

$$\cdot \int_{-1}^1 (3x+1)^4 dx = \frac{1}{3} \int_{-1}^1 3(3x+1)^4 dx = \frac{1}{3} \left[\frac{(3x+1)^5}{5} \right]_{-1}^1 = \frac{1}{15} (4^5 - (-2)^5) = \frac{1}{15} (4^5 + 2^5)$$

□

$$ii) \cdot \frac{e^x e^{|x|}}{e^{x^2}} \leq 1 \Leftrightarrow e^{x+|x|-x^2} \leq e^0 \xrightarrow{e^x \uparrow} x+|x|-x^2 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 2x - x^2 \leq 0 \end{cases} \circ \begin{cases} x < 0 \\ -x^2 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 - 2x \geq 0 \end{cases} \circ \begin{cases} x < 0 \\ x^2 \geq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \underline{S =]-\infty, 0] \cup [2, +\infty[}.$$

$$\cdot 2x|x+1| - x^2 < 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 \geq 0 \\ 2x^2 + 2x - x^2 < 1 \end{cases} \circ \begin{cases} x+1 < 0 \\ -2x^2 - 2x - x^2 < 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x^2 + 2x - 1 < 0 \end{cases} \circ \begin{cases} x < -1 \\ 3x^2 + 2x + 1 > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ -1-\sqrt{2} < x < -1+\sqrt{2} \end{cases} \circ \begin{cases} x < -1 \\ \mathbb{R} \end{cases} \quad \underline{S =]-\infty, -1+\sqrt{2}[}.$$

□

iii) Dal teorema fondamentale del calcolo integrale si ottiene che

$$F'(x) = \frac{x^2-3x}{e^x} \quad \forall x \in [-1, 4]; \text{ allora } F'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 3x = 0$$

$\Leftrightarrow x=0 \circ x=3$. Risulta che i punti critici di F sono dunque gli $x \in \{0, 3\}$. ■

3) i) $x=-3$ pt. di massimo loc. stesso per f in $\mathbb{R}$;

$x=-2$ " "

$x=1$ pt. di minimo loc. stesso per f in $\mathbb{R}$. □

ii) $y=-1$ asintoto orizzontale per f , per $x \rightarrow -\infty$ ($\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$);

$y=1$ " " , per $x \rightarrow +\infty$ ($\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$);

$x=-2$ asintoto verticale per f ($\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = -\infty$);

$x=1$ " " ($\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$). □

iii) f ristretta a $]-\infty, -3]$ è crescente;

f " a $[-3, -2[$ è decrescente;

f " a $[-2, 1]$ "

f " a $]1, +\infty[$ è decrescente. $\square$

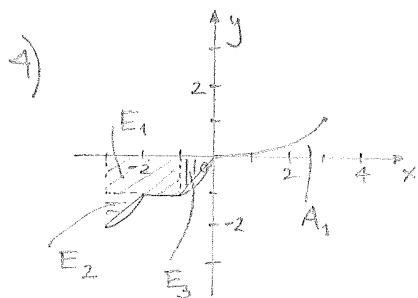
iv) $(f \circ g)(0) = \underline{-1}$, poiché $g(0) = 0$ e $f(0) = -1$;

$(g \circ f)(-2) \nexists$, poiché $f(-2) = 3$, ma $3 \notin \text{dom } g$ e quindi non è definito $g(3)$;

$(fg)(1) = \underline{0}$, poiché $f(0) = -1$ e $g(1) = 0$. $\square$

v) $\sum_{n=1}^{10} g\left(\frac{2}{n}\right) = g(2) + g(1) + g\left(\frac{2}{3}\right) + \dots + g\left(\frac{1}{5}\right) = \underline{-1}$. $\blacksquare$

$\underset{0}{\parallel}$ $\underset{0}{\parallel}$ $\underset{0}{\parallel}$



i) $F(0) = \int_{-3}^0 f(t) dt < -\text{area}(E_1) - \text{area}(E_2) - \text{area}(E_3)$

$$= -2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = -3$$

$\min_{x \in [-3, 3]} F(x) = F(0) < -3$. $\square$

ii) F è strettamente decrescente in $[-3, 0]$ e strettamente crescente in $[0, 3]$ (questo si deduce immediatamente dalla interpretazione geometrica dell'integrale - equindici: F - oppure osservando che

$F'(x) = f(x)$ in $[-3, 3]$ con f). Inoltre

$F(3) < 0$ ($F(3) < -3 + \frac{3 \cdot 1}{2} < 0$) $\blacksquare$

5) $f(x) = 4 \log(x^2 + e)$ i) • $\text{dom } f = \mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$;

• segue da f

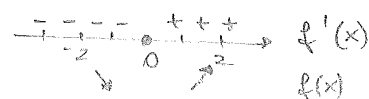
poiché $x^2 + e \geq e \quad \forall x \in \mathbb{R}$ e

$\log(x^2 + e) \geq \log e = 1$;

• $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$;

• continuità di f in $\mathbb{R}$;

• $\text{dom } f' = \mathbb{R}$ $f'(x) = \frac{8x}{x^2+e}$



$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=0$ pt. critico per f
 $x=0$ è pt. di min. loc. obliquo per f .

$f(0) = 4$;

• $\text{dom } f'' = \mathbb{R}$ $f''(x) = \frac{8(x^2+e) - 8x \cdot 2x}{(x^2+e)^2} = \frac{8(e-x^2)}{(x^2+e)^2}$

$f''(x)=0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{e}$

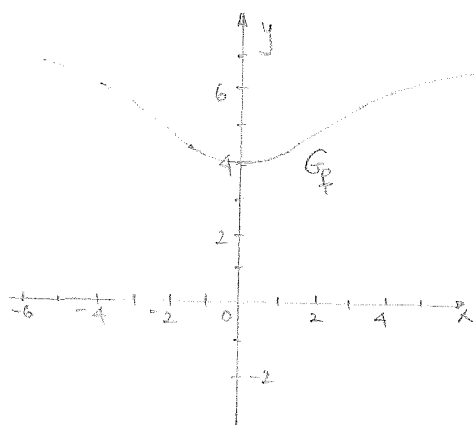
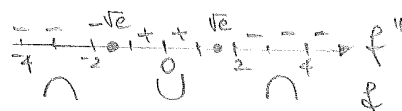
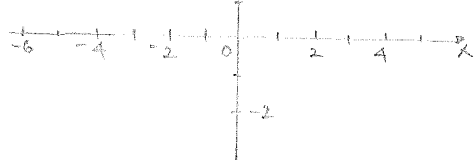


grafico qualitativo di f



ii) $y=4$ eq. retta t_f al grafico di f in $x=0$.



iii)

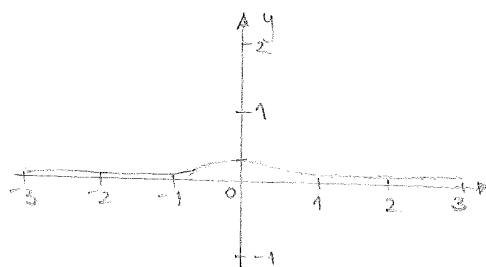


grafico qualitativo della funzione $g(x) = \frac{1}{f(x)}$.



iv) $\max_{x \in \mathbb{R}} g(x) = \underline{\underline{\frac{1}{4}}}$.



6) $4C_{n,2} - D_{n,2} = 20 \Leftrightarrow 4 \frac{n!}{(n-2)!2!} - \frac{n!}{(n-2)!} = 20$

$\Leftrightarrow 2n(n-1) - n(n-1) = 20$

$\Leftrightarrow n^2 - n - 20 = 0$

$\Leftrightarrow n_{1/2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+80}}{2} = \frac{1 \pm 9}{2} = \begin{cases} 5 \\ -4 \end{cases}$

$n=5$ è la soluzione ricercata.

