

COGNOME _____
 NOME _____
 MATRICOLA | | | | | |

NON SCRIVERE QUI

1	2	3	4	5	6
---	---	---	---	---	---

A

UNIVERSITÀ DI TRENTO — DIP. DI PSICOLOGIA E SCIENZE COGNITIVE
 CDL IN SCIENZE E TECNICHE DI PSICOLOGIA COGNITIVA

ESAME SCRITTO DI ANALISI MATEMATICA
 A.A. 2013-2014 — ROVERETO, 5 GIUGNO 2014

Riempite immediatamente questo foglio scrivendo in stampatello cognome, nome e numero di matricola. Scrivete cognome e nome (in stampatello) su ogni foglio a quadretti. Il tempo massimo per svolgere la prova è di **TRE ORE**.

Non potete uscire se non dopo avere consegnato il compito, al termine della prova.

È obbligatorio consegnare sia il testo, sia tutti i fogli ricevuti; al momento della consegna, inserite tutti gli altri fogli, compreso quello con il testo, dentro uno dei fogli a quadretti.

Potete usare solo il vostro materiale di scrittura e il vostro materiale di studio. Non usate il colore rosso.

- 1) i) Scrivete la negazione della seguente proposizione:

$$\mathcal{A} = "\exists x_1, x_2 \in \mathbb{R} : [x_1 \neq x_2 \text{ e } |x_1 - 1| = |x_2 + 1|]" .$$

Dite quale delle due proposizioni è vera e quale è falsa (motivando la risposta).

- ii) Dati gli insiemi $A = \{-1, 0, 1\}$, $B = \{x \in \mathbb{Z} : x^2 \leq 1\}$ e $C = [-1, 1]$, dite quali delle seguenti affermazioni sono vere e quali sono false (motivando le risposte):

$$\begin{aligned} [0, 1] &\subset A; \quad (-1, -1) \in B \times A; \quad \{0, 1\} \in \mathcal{P}(C); \quad]0, 1[\in \mathcal{P}(B); \\ A \times B &\subseteq C \times C; \quad A = B; \quad A \subset B; \quad -2 \in B. \end{aligned}$$

- 2) Siano $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ le funzioni definite da

$$f(x) = \begin{cases} -|x+2|+1 & \text{se } x < -1 \\ 2\sqrt{x+1} & \text{se } -1 \leq x \leq 3 \\ 1 & \text{se } x > 3; \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} -x^2+1 & \text{se } -1 \leq x \leq 1 \\ -\frac{1}{x^2}+1 & \text{se } x < -1 \text{ o } x > 1. \end{cases}$$

- i) Rappresentate nel piano cartesiano il grafico di f e il grafico di g .
 ii) Determinate l'immagine di f . La funzione f è limitata?
 iii) Determinate, se esistono, $(g \circ f)(-2)$, $(f - g)(0)$ e $(\frac{f}{g})(-3)$.
 iv) Rappresentate graficamente, nei loro domini, le funzioni

$$x \mapsto -f(x) + 1 \quad x \mapsto 2g(x+1).$$

v) Determinate $k \in \mathbb{R}$ tale che $\int_{-1}^3 (f(x) - k) dx = -\frac{4}{3}$.

3) Risolvete in \mathbb{R} le seguenti disequazioni:

$$\log_{\frac{1}{3}}|x^2 - 2x| \geq -1; \quad \frac{x(2^x - 2)}{|x| - 2} \geq 0; \quad \sqrt{x^2 - 1} \leq 0.$$

4) Calcolate

i) $\lim_{x \rightarrow 2^-} \left(\frac{1}{4-x^2} - \frac{1}{x-2} \right), \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2^x - x^2}{4x^2 + \log|x|};$

ii) $\int_0^1 \frac{3e^x}{e^x + 2} dx, \quad \int_{-2}^1 ||x^2 + 1| - 2| dx;$

iii) $\sum_{k=1}^4 \text{perimetro } (Q_k), \text{ dove } Q_k = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq \frac{1}{k}, |y| \leq k\} \text{ per ogni } k \in \mathbb{N}.$

5) i) Studiate (insieme di definizione, segno, comportamento agli estremi dell'insieme di definizione, continuità, derivabilità, punti critici e monotonia, convessità/concavità) la funzione definita da

$$f(x) = \sqrt{2}xe^{-x^2+1/2}$$

e tracciatene un grafico qualitativo.

ii) Determinate l'equazione della retta r tangente al grafico di f nel punto di coordinata $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ e rappresentatela graficamente nello stesso sistema di riferimento di f .

iii) Calcolate l'area della regione piana delimitata dal grafico di f , dall'asse x e dalla retta di equazione $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

6) Rappresentate graficamente nel piano cartesiano l'insieme A delle coppie $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ soddisfacenti il seguente sistema di disequazioni

$$\begin{cases} y + x^2 + 2x - 3 \leq 0 \\ 4x^2 + y^2 + 8x + 3 > 0 \\ y + x + 3 \geq 0. \end{cases}$$

COGNOME _____
 NOME _____
 MATRICOLA | | | | | |

NON SCRIVERE QUI

1	2	3	4	5	6
---	---	---	---	---	---

B

UNIVERSITÀ DI TRENTO — DIP. DI PSICOLOGIA E SCIENZE COGNITIVE
 CDL IN SCIENZE E TECNICHE DI PSICOLOGIA COGNITIVA

ESAME SCRITTO DI ANALISI MATEMATICA
 A.A. 2013-2014 — ROVERETO, 5 GIUGNO 2014

Riempite immediatamente questo foglio scrivendo in stampatello cognome, nome e numero di matricola. Scrivete cognome e nome (in stampatello) su ogni foglio a quadretti. Il tempo massimo per svolgere la prova è di **TRE ORE**.

Non potete uscire se non dopo avere consegnato il compito, al termine della prova.

È obbligatorio consegnare sia il testo, sia tutti i fogli ricevuti; al momento della consegna, inserite tutti gli altri fogli, compreso quello con il testo, dentro uno dei fogli a quadretti.

Potete usare solo il vostro materiale di scrittura e il vostro materiale di studio. Non usate il colore rosso.

- 1) i) Scrivete la negazione della seguente proposizione:

$$\mathcal{P} = " \exists x_1, x_2 \in \mathbb{R} : [x_1 \neq x_2 \text{ e } |x_1 - 2| = |x_2 + 2|]" .$$

Dite quale delle due proposizioni è vera e quale è falsa (motivando la risposta).

- ii) Dati gli insiemi $A = [-1, 1]$, $B = \{x \in \mathbb{Z} : x^2 \geq 1\}$ e $C = \{-1, 0, 1\}$, dite quali delle seguenti affermazioni sono vere e quali sono false (motivando le risposte):

$$\begin{aligned} [0, 1] &\subset A; \quad (-1, -1) \in B \times A; \quad \{0, 1\} \in \mathcal{P}(C); \quad]0, 1[\in \mathcal{P}(B); \\ A \times \{1\} &\subseteq A \times B; \quad \mathbb{R} \setminus A = B; \quad C \subset A; \quad -2 \in B. \end{aligned}$$

- 2) Siano $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ le funzioni definite da

$$f(x) = \begin{cases} |x+2|-1 & \text{se } x < -1 \\ -2\sqrt{x+1} & \text{se } -1 \leq x \leq 3 \\ 1 & \text{se } x > 3; \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} x^2-1 & \text{se } -1 \leq x \leq 1 \\ -\frac{1}{x^2}+1 & \text{se } x < -1 \text{ o } x > 1. \end{cases}$$

- i) Rappresentate nel piano cartesiano il grafico di f e il grafico di g .
 ii) Determinate l'immagine di f . La funzione f è limitata?
 iii) Determinate, se esistono, $(g \circ f)(-2)$, $(f - g)(0)$ e $\left(\frac{f}{g}\right)(-3)$.
 iv) Rappresentate graficamente, nei loro domini, le funzioni

$$x \mapsto -f(x) + 1 \quad x \mapsto 2g(x+1).$$

v) Determinate $k \in \mathbb{R}$ tale che $\int_{-1}^3 (f(x) + k) dx = \frac{4}{3}$.

3) Risolvete in \mathbb{R} le seguenti disequazioni:

$$\log_{\frac{1}{4}}|x^2 - 3x| \geq -1; \quad \frac{x(3^x - 3)}{|x| - 2} \leq 0; \quad \sqrt{x^2 - 4} \leq 0.$$

4) Calcolate

i) $\lim_{x \rightarrow 2^-} \left(\frac{1}{x^2 - 4} + \frac{1}{x - 2} \right), \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 3^x}{-2x^2 + \log|x|};$

ii) $\int_0^1 \frac{2e^x}{e^x + 3} dx, \quad \int_{-4}^2 ||x^2 + 2| - 6| dx;$

iii) $\sum_{k=1}^4 \text{perimetro}(Q_k), \text{ dove } Q_k = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq k, |y| \leq \frac{1}{k}\} \text{ per ogni } k \in \mathbb{N}.$

5) Studiate (insieme di definizione, segno, comportamento agli estremi dell'insieme di definizione, continuità, derivabilità, punti critici e monotonia, convessità/concavità) la funzione definita da

$$f(x) = -\sqrt{2}xe^{-x^2+1/2}$$

e tracciatene un grafico qualitativo.

ii) Determinate l'equazione della retta r tangente al grafico di f nel punto di coordinata $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ e rappresentatela graficamente nello stesso sistema di riferimento di f .

iii) Calcolate l'area della regione piana delimitata dal grafico di f , dall'asse x e dalla retta di equazione $x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$.

6) Rappresentate graficamente nel piano cartesiano l'insieme A delle coppie $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ soddisfacenti il seguente sistema di disequazioni

$$\begin{cases} y - x^2 - 2x + 3 \geq 0 \\ 4x^2 + y^2 + 8x + 3 > 0 \\ y - x - 3 \leq 0. \end{cases}$$