COGNOME ______________	NON SCRIVERE QUI
NOME ______________	1 2 3 4 5 6
MATRICOLA	A

UNIVERSITÀ DI TRENTO — DIP. DI PSICOLOGIA E SCIENZE COGNITIVE

CDL IN SCIENZE E TECNICHE DI PSICOLOGIA COGNITIVA

ESAME SCRITTO DI ANALISI MATEMATICA

A.A. 2013-2014 — ROVERETO, 13 FEBBRAIO 2014

Riempite immediatamente questo foglio scrivendo in stampatello cognome, nome e numero di matricola. Scrivete cognome e nome (in stampatello) su ogni foglio a quadretti. Il tempo massimo per svolgere la prova è di **TRE ORE**.
Non potete uscire se non dopo avere consegnato il compito, al termine della prova.
È obbligatorio consegnare sia il testo, sia tutti i fogli ricevuti; al momento della consegna, inserite tutti gli altri fogli, compreso quello con il testo, dentro uno dei fogli a quadretti.
Potete usare solo il vostro materiale di scrittura e il vostro materiale di studio. Non usate il colore rosso.

1) i) Scrivete la negazione della seguente proposizione:

$$\mathcal{A} = \text{"}\forall x_1, x_2 \in [0,1], \quad [(x_1 < x_2) \Longrightarrow (-3x_1 < 2x_2)]\text{"}.$$

Dite quale delle due proposizioni è vera e quale è falsa.

ii) Calcolate

$$\lim_{x\to -1^+} \frac{1}{|x^3|-1}\,, \qquad \int_0^1 \frac{1-e^{3x}}{e^x}\,dx\,, \qquad \sum_{k=1}^{20}\Big(\frac{1}{k^2}-\frac{1}{(k+1)^2}\Big)\,.$$

2) Sia C il centro dell'ellisse $\mathcal{E}$ di equazione $x^2-4x+4y^2-8y+4=0$.
i) Determinate le costanti a, b e $c \in \mathbb{R}$ tali che la funzione $f(x)=ax^2+bx+c$ soddisfi entrambe le seguenti proprietà:
a) la retta tangente al grafico di f nell'origine degli assi ha pendenza 1,
b) il punto C e l'origine degli assi appartengono al grafico di f.
ii) Rappresentate graficamente f e $\mathcal{E}$.
iii) Determinate il più grande intervallo $A \subset [0,+\infty[$ tale che f ristretta ad A sia iniettiva.
iv) Determinate l'area della regione piana delimitata dal grafico di f e dalla retta di equazione $y+x=0$.

3) Siano dati gli insiemi

$$A = \{x \in \mathbb{R} : \log_{\frac{1}{2}}(1+x) + \log_{\frac{1}{2}}(2x) \geq -2\} \;\text{ e }\; B = \{x \in \mathbb{R} : \frac{x + |x+1|}{2^x} < 0\}\,.$$

i) Determinate A e B e rappresentateli sulla retta reale. Dite se hanno massimo e/o minimo.
ii) Determinate $A \cup B$ e dite se è un intervallo.
iii) Rappresentate graficamente nel piano cartesiano l'insieme $A \times A$.

---

4) Siano $f : [-3,1] \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ le funzioni definite da

$$f(x) = \begin{cases} (x+3)^2 - 2 & \text{se } -3 \leq x < -1 \\ 2\log_2(x+3) & \text{se } -1 \leq x \leq 1 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} |x| - 1 & \text{se } -1 < x < 1 \\ \dfrac{1}{x^2} & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus]-1,1[\,. \end{cases}$$

i) Rappresentate nel piano cartesiano il grafico di f e il grafico di g.
ii) Determinate l'immagine di f. Determinate $f^{-1}(-1)$ e $f^{-1}(4)$, dove f^{-1} è la funzione inversa di f definita su $f([-3,1])$.
iii) Determinate $(f \circ g)(x)$ per $x \in]-1,1[$.
iv) Dite se g soddisfa le ipotesi del teorema di Weierstrass su $[-2,2]$.
v) Determinate, se esistono, il massimo e il minimo (risp. i punti di massimo e i punti di minimo) della funzione $|g(x)|$ su $\mathbb{R}$.

---

5) i) Studiate (insieme di definizione, segno, comportamento agli estremi dell'insieme di definizione, continuità, derivabilità, punti critici e monotonia, convessità/concavità) la funzione definita da

$$f(x) = 2x^5 - 5x^2\,.$$

ii) Determinate l'equazione della retta r tangente al grafico di f nel punto di coordinata $x = 0$ e rappresentatela graficamente nello stesso sistema di riferimento di f.
iii) Determinate l'area della regione piana E delimitata dal grafico di f, dal grafico di $g(x) = \dfrac{1}{(x+1)^2}$ e dalle rette di equazione $x = 0$ e $x = 1$.

---

6) Rappresentate graficamente una funzione $f : [-2,1] \to \mathbb{R}$ continua e derivabile tale che la funzione integrale $F : [-2,1] \to \mathbb{R}$ definita da $F(x) = \displaystyle\int_{-2}^{x} f(t)\,dt$ risulti crescente e concava.

Cognome ____________	Non scrivere qui
Nome ____________	1 2 3 4 5 6
Matricola	B

Università di Trento — Dip. di Psicologia e Scienze Cognitive

CdL in Scienze e Tecniche di Psicologia Cognitiva

Esame scritto di Analisi Matematica

A.A. 2013-2014 — Rovereto, 13 Febbraio 2014

Riempite immediatamente questo foglio scrivendo in stampatello cognome, nome e numero di matricola. Scrivete cognome e nome (in stampatello) su ogni foglio a quadretti. Il tempo massimo per svolgere la prova è di **TRE ORE**.
Non potete uscire se non dopo avere consegnato il compito, al termine della prova.
È obbligatorio consegnare sia il testo, sia tutti i fogli ricevuti; al momento della consegna, inserite tutti gli altri fogli, compreso quello con il testo, dentro uno dei fogli a quadretti.
Potete usare solo il vostro materiale di scrittura e il vostro materiale di studio. Non usate il colore rosso.

1) i) Scrivete la negazione della seguente proposizione:

$$\mathcal{A} = \text{"}\forall x_1, x_2 \in [0,1], \quad [(x_1 < x_2) \Longrightarrow (x_1 > x_2^2)]\text{"}.$$

Dite quale delle due proposizioni è vera e quale è falsa.

ii) Calcolate

$$\lim_{x\to -1^-} \frac{1}{|x^3|-1}, \qquad \int_0^1 \frac{e^{2x}+1}{e^x}\,dx, \qquad \sum_{k=1}^{21}\Big(\frac{1}{(k+1)^2} - \frac{1}{k^2}\Big).$$

2) Sia C il centro dell'ellisse $\mathcal{E}$ di equazione $x^2 + 4x + 4y^2 - 8y + 4 = 0$.
i) Determinate le costanti a, b e $c \in \mathbb{R}$ tali che la funzione $f(x) = ax^2 + bx + c$ soddisfi entrambe le seguenti proprietà:
a) la retta tangente al grafico di f nel punto $P = (0,2)$ ha pendenza 1,
b) i punti C e P appartengono al grafico di f.
ii) Rappresentate graficamente f e $\mathcal{E}$.
iii) Determinate il più grande intervallo $A \subset]-\infty, 0]$ tale che f ristretta ad A sia iniettiva.
iv) Determinate l'area della regione piana delimitata dal grafico di f e dalla retta di equazione $y + x - 2 = 0$.

3) Siano dati gli insiemi

$$A = \{x \in \mathbb{R} : \log_{\frac{1}{2}}(3+x) + \log_{\frac{1}{2}} x \geq -2\} \;\text{ e }\; B = \{x \in \mathbb{R} : \frac{3x - |x+1|}{2^x} < 0\}\,.$$

i) Determinate A e B e rappresentateli sulla retta reale. Dite se hanno massimo e/o minimo.
ii) Determinate $A \cap B$ e dite se è un intervallo.
iii) Rappresentate graficamente nel piano cartesiano l'insieme $B \times B$.

---

4) Siano $f : [-4,1] \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ le funzioni definite da

$$f(x) = \begin{cases} (x+4)^2 - 4 & \text{se } -4 \leq x < -2 \\ 2\log_2(x+3) & \text{se } -2 \leq x \leq 1 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} -|x| + 1 & \text{se } -1 \leq x \leq 1 \\ -\dfrac{1}{x^2} & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus [-1,1]\,. \end{cases}$$

i) Rappresentate nel piano cartesiano il grafico di f e il grafico di g.
ii) Determinate l'immagine di f. Determinate $f^{-1}(2)$ e $f^{-1}(4)$, dove f^{-1} è la funzione inversa di f definita su $f([-4,1])$.
iii) Determinate $(f \circ g)(x)$ per $x \in [-1,1]$.
iv) Dite se g soddisfa le ipotesi del teorema di Weierstrass su $[-3,3]$.
v) Determinate, se esistono, il massimo e il minimo (risp. i punti di massimo e i punti di minimo) della funzione $|g(x)|$ su $\mathbb{R}$.

---

5) i) Studiate (insieme di definizione, segno, comportamento agli estremi dell'insieme di definizione, continuità, derivabilità, punti critici e monotonia, convessità/concavità) la funzione definita da

$$f(x) = 5x^2 - 2x^5\,.$$

ii) Determinate l'equazione della retta r tangente al grafico di f nel punto di coordinata $x = 1$ e rappresentatela graficamente nello stesso sistema di riferimento di f.
iii) Determinate l'area della regione piana E delimitata dal grafico di f, dal grafico di $g(x) = -\dfrac{1}{(x+1)^2}$ e dalle rette di equazione $x = 0$ e $x = 1$.

---

6) Rappresentate graficamente una funzione $f : [-1,2] \to \mathbb{R}$ continua e derivabile tale che la funzione integrale $F : [-1,2] \to \mathbb{R}$ definita da $F(x) = \displaystyle\int_{-1}^{x} f(t)\,dt$ risulti decrescente e convessa.

COGNOME ______________	NON SCRIVERE QUI
NOME ______________	C
MATRICOLA ⌊_⌊_⌊_⌊_⌊_⌊_⌋	1 2 3 4 5 6

UNIVERSITÀ DI TRENTO — DIP. DI PSICOLOGIA E SCIENZE COGNITIVE

CDL IN SCIENZE E TECNICHE DI PSICOLOGIA COGNITIVA

ESAME SCRITTO DI ANALISI MATEMATICA

A.A. 2013-2014 — ROVERETO, 13 FEBBRAIO 2014

Riempite immediatamente questo foglio scrivendo in stampatello cognome, nome e numero di matricola. Scrivete cognome e nome (in stampatello) su ogni foglio a quadretti. Il tempo massimo per svolgere la prova è di **TRE ORE**.
Non potete uscire se non dopo avere consegnato il compito, al termine della prova.
È obbligatorio consegnare sia il testo, sia tutti i fogli ricevuti; al momento della consegna, inserite tutti gli altri fogli, compreso quello con il testo, dentro uno dei fogli a quadretti.
Potete usare solo il vostro materiale di scrittura e il vostro materiale di studio. Non usate il colore rosso.

1) Siano dati gli insiemi

$$A = \{x \in \mathbb{R} : \log_{\frac{1}{2}}(1+x) + \log_{\frac{1}{2}}(2x) \geq -2\} \text{ e } B = \{x \in \mathbb{R} : \frac{x+|x+1|}{2^x} < 0\}.$$

i) Determinate A e B e rappresentateli sulla retta reale. Dite se hanno massimo e/o minimo.
ii) Determinate $A \cup B$ e dite se è un intervallo.
iii) Rappresentate graficamente nel piano cartesiano l'insieme $A \times A$.

2) Sia C il centro dell'ellisse $\mathcal{E}$ di equazione $x^2 - 4x + 4y^2 - 8y + 4 = 0$.
i) Determinate le costanti a, b e $c \in \mathbb{R}$ tali che la funzione $f(x) = ax^2 + bx + c$ soddisfi entrambe le seguenti proprietà:
a) la retta tangente al grafico di f nell'origine degli assi ha pendenza 1,
b) il punto C e l'origine degli assi appartengono al grafico di f.
ii) Rappresentate graficamente f e $\mathcal{E}$.
iii) Determinate il più grande intervallo $A \subset [0, +\infty[$ tale che f ristretta ad A sia iniettiva.
iv) Determinate l'area della regione piana delimitata dal grafico di f e dalla retta di equazione $y + x = 0$.

3) i) Scrivete la negazione della seguente proposizione:

$$\mathcal{A} = \text{"}\forall x_1, x_2 \in [0,1], \quad [(x_1 < x_2) \implies (-3x_1 < 2x_2)]\text{"}.$$

Dite quale delle due proposizioni è vera e quale è falsa.

ii) Calcolate

$$\lim_{x \to -1^+} \frac{1}{|x^3| - 1}, \qquad \int_0^1 \frac{1 - e^{3x}}{e^x}\, dx, \qquad \sum_{k=1}^{20} \left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2}\right).$$

---

4) Siano $f : [-3,1] \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ le funzioni definite da

$$f(x) = \begin{cases} (x+3)^2 - 2 & \text{se } -3 \le x < -1 \\ 2\log_2(x+3) & \text{se } -1 \le x \le 1 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} |x| - 1 & \text{se } -1 < x < 1 \\ \dfrac{1}{x^2} & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus]-1,1[\,. \end{cases}$$

i) Rappresentate nel piano cartesiano il grafico di f e il grafico di g.
ii) Determinate l'immagine di f. Determinate $f^{-1}(-1)$ e $f^{-1}(4)$, dove f^{-1} è la funzione inversa di f definita su $f([-3,1])$.
iii) Determinate $(f \circ g)(x)$ per $x \in]-1,1[$.
iv) Dite se g soddisfa le ipotesi del teorema di Weierstrass su $[-2,2]$.
v) Determinate, se esistono, il massimo e il minimo (risp. i punti di massimo e i punti di minimo) della funzione $|g(x)|$ su $\mathbb{R}$.

---

5) i) Studiate (insieme di definizione, segno, comportamento agli estremi dell'insieme di definizione, continuità, derivabilità, punti critici e monotonia, convessità/concavità) la funzione definita da

$$f(x) = 2x^5 - 5x^2.$$

ii) Determinate l'equazione della retta r tangente al grafico di f nel punto di coordinata $x = 0$ e rappresentatela graficamente nello stesso sistema di riferimento di f.
iii) Determinate l'area della regione piana E delimitata dal grafico di f, dal grafico di $g(x) = \dfrac{1}{(x+1)^2}$ e dalle rette di equazione $x = 0$ e $x = 1$.

---

6) Rappresentate graficamente una funzione $f : [-2,1] \to \mathbb{R}$ continua e derivabile tale che la funzione integrale $F : [-2,1] \to \mathbb{R}$ definita da $F(x) = \int_{-2}^{x} f(t)\, dt$ risulti crescente e concava.

COGNOME ______________	NON SCRIVERE QUI
NOME ______________	1 2 3 4 5 6
MATRICOLA ⌊⌊⌊⌊⌊⌊	D

UNIVERSITÀ DI TRENTO — DIP. DI PSICOLOGIA E SCIENZE COGNITIVE

CDL IN SCIENZE E TECNICHE DI PSICOLOGIA COGNITIVA

ESAME SCRITTO DI ANALISI MATEMATICA

A.A. 2013-2014 — ROVERETO, 13 FEBBRAIO 2014

Riempite immediatamente questo foglio scrivendo in stampatello cognome, nome e numero di matricola. Scrivete cognome e nome (in stampatello) su ogni foglio a quadretti. Il tempo massimo per svolgere la prova è di **TRE ORE**.
Non potete uscire se non dopo avere consegnato il compito, al termine della prova.
È obbligatorio consegnare sia il testo, sia tutti i fogli ricevuti; al momento della consegna, inserite tutti gli altri fogli, compreso quello con il testo, dentro uno dei fogli a quadretti.
Potete usare solo il vostro materiale di scrittura e il vostro materiale di studio. Non usate il colore rosso.

1) i) Sia C il centro dell'ellisse $\mathcal{E}$ di equazione $x^2 + 4x + 4y^2 - 8y + 4 = 0$.
i) Determinate le costanti a, b e $c \in \mathbb{R}$ tali che la funzione $f(x) = ax^2 + bx + c$ soddisfi entrambe le seguenti proprietà:
a) la retta tangente al grafico di f nel punto $P = (0, 2)$ ha pendenza 1,
b) i punti C e P appartengono al grafico di f.
ii) Rappresentate graficamente f e $\mathcal{E}$.
iii) Determinate il più grande intervallo $A \subset]-\infty, 0]$ tale che f ristretta ad A sia iniettiva.
iv) Determinate l'area della regione piana delimitata dal grafico di f e dalla retta di equazione $y + x - 2 = 0$.

2) Siano dati gli insiemi

$$A = \{x \in \mathbb{R} : \log_{\frac{1}{2}}(3 + x) + \log_{\frac{1}{2}} x \geq -2\} \text{ e } B = \{x \in \mathbb{R} : \frac{3x - |x + 1|}{2^x} < 0\}.$$

i) Determinate A e B e rappresentateli sulla retta reale. Dite se hanno massimo e/o minimo.
ii) Determinate $A \cap B$ e dite se è un intervallo.
iii) Rappresentate graficamente nel piano cartesiano l'insieme $B \times B$.

3) Scrivete la negazione della seguente proposizione:

$$\mathcal{A} = \text{"}\forall x_1, x_2 \in [0,1], \quad [(x_1 < x_2) \Longrightarrow (x_1 > x_2^2)]\text{"}.$$

Dite quale delle due proposizioni è vera e quale è falsa.

ii) Calcolate

$$\lim_{x\to -1^-} \frac{1}{|x^3|-1}\,, \qquad \int_0^1 \frac{e^{2x}+1}{e^x}\,dx\,, \qquad \sum_{k=1}^{21}\Big(\frac{1}{(k+1)^2}-\frac{1}{k^2}\Big)\,.$$

---

4) Siano $f : [-4,1] \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ le funzioni definite da

$$f(x) = \begin{cases} (x+4)^2 - 4 & \text{se } -4 \le x < -2 \\ 2\log_2(x+3) & \text{se } -2 \le x \le 1 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} -|x|+1 & \text{se } -1 \le x \le 1 \\ -\dfrac{1}{x^2} & \text{se } x \in \mathbb{R}\setminus[-1,1]\,. \end{cases}$$

i) Rappresentate nel piano cartesiano il grafico di f e il grafico di g.
ii) Determinate l'immagine di f. Determinate $f^{-1}(2)$ e $f^{-1}(4)$, dove f^{-1} è la funzione inversa di f definita su $f([-4,1])$.
iii) Determinate $(f \circ g)(x)$ per $x \in [-1,1]$.
iv) Dite se g soddisfa le ipotesi del teorema di Weierstrass su $[-3,3]$.
v) Determinate, se esistono, il massimo e il minimo (risp. i punti di massimo e i punti di minimo) della funzione $|g(x)|$ su $\mathbb{R}$.

---

5) i) Studiate (insieme di definizione, segno, comportamento agli estremi dell'insieme di definizione, continuità, derivabilità, punti critici e monotonia, convessità/concavità) la funzione definita da

$$f(x) = 5x^2 - 2x^5\,.$$

ii) Determinate l'equazione della retta r tangente al grafico di f nel punto di coordinata $x = 1$ e rappresentatela graficamente nello stesso sistema di riferimento di f.
iii) Determinate l'area della regione piana E delimitata dal grafico di f, dal grafico di $g(x) = -\dfrac{1}{(x+1)^2}$ e dalle rette di equazione $x = 0$ e $x = 1$.

---

6) Rappresentate graficamente una funzione $f : [-1,2] \to \mathbb{R}$ continua e derivabile tale che la funzione integrale $F : [-1,2] \to \mathbb{R}$ definita da $F(x) = \displaystyle\int_{-1}^{x} f(t)\,dt$ risulti decrescente e convessa.
