Cognome ______________________

Nome ______________________

Matricola

Non scrivere qui

1	2	3	4	5

A

Università di Trento — Dip. di Psicologia e Scienze Cognitive

CdL in Scienze e Tecniche di Psicologia Cognitiva

Prima prova intermedia di Analisi Matematica

A.A. 2013-2014 — Rovereto, 31 Ottobre 2013

Riempite immediatamente questo foglio scrivendo in stampatello cognome, nome e numero di matricola. Scrivete cognome e nome (in stampatello) su ogni foglio a quadretti. Il tempo massimo per svolgere la prova è di **DUE ORE E MEZZA**.
IL SUPERAMENTO DEI PRIMI 10 ESERCIZI È CONDIZIONE NECESSARIA PERCHÈ LA SECONDA PARTE DEL COMPITO VENGA VALUTATA.
È obbligatorio consegnare sia il testo, sia tutti i fogli ricevuti; al momento della consegna, inserite tutti gli altri fogli, compreso quello con il testo, dentro uno dei fogli a quadretti.
Potete usare solo il vostro materiale di scrittura e il vostro materiale di studio. Non usate il colore rosso.

a1) Siano dati gli insiemi $A = [-3, +\infty[$ e $B =]0, 4]$. Determinate l'insieme $A \setminus B$.

Risposta:

a2) Sia $A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 < 1\}$. Dite quali delle seguenti affermazioni sono vere e quali sono false:

(i) $\min A = 0$; (ii) $]-1, 0[\in \mathcal{P}(A)$; (iii) A non è limitato; (iv) non esiste $\max A$.

Risposta:

a3) Scrivete la negazione della seguente proposizione: "Tutti gli studenti iscritti nell'a.a. corrente al primo anno del CdL in STPC si sono iscritti alla Prima Prova Intermedia di Analisi Matematica e si sono presentati alla prova".

Risposta:

a4) Determinate tutti gli $a \in \mathbb{R}$ tali che l'equazione $ax^2 + 2x - 1 = 0$ ha due soluzioni.

Risposta:

a5) Rappresentate graficamente $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x^2 < 4\,, \quad y = x\}\,.$

Risposta:

---

a6) Scrivete l'equazione della retta r passante per i punti $P = (-1, 2)$ e $Q = (-1, 3)\,.$

Risposta:

---

a7) Rappresentate graficamente nel piano cartesiano l'insieme E delle coppie $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ soddisfacenti $0 \le y \le -x^2 + 2x\,.$

Risposta:

---

a8) Risolvete in $\mathbb{R}$ la seguente disequazione $\dfrac{x^2+1}{x+1} \le 0\,.$

Risposta:

---

a9) Sia $f : [-2, 1] \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } -2 \le x < 0 \\ -x+2 & \text{se } 0 \le x \le 1\,. \end{cases}$$

Determinate l'immagine di f .

Risposta:

---

a10) Siano $f\,, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ le funzioni definite da

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{se } x < 1 \\ \dfrac{3}{x} & \text{se } x \ge 1 \end{cases} \qquad\qquad g(x) = \sqrt[3]{x}\,.$$

Determinate $(f+g)(-1)$ e $(\dfrac{f}{g})(1)\,.$

Risposta:

---

b1) i) Scrivete la negazione della seguente proposizione $\mathcal{A}$:

$$\forall x_1,\ x_2 \in \mathbb{R}\,, \quad [(x_1 \neq x_2) \Longrightarrow (x_1^2 \neq x_2^2)]\,.$$

ii) Dite (motivando la risposta) quale delle due proposizioni è vera e quale è falsa.

---

b2) i) Rappresentate graficamente nel piano cartesiano l'insieme A delle coppie $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ soddisfacenti il seguente sistema di disequazioni

$$\begin{cases} x^2 - y^2 - 4x \leq 0 \\ 4(x-2)^2 + y^2 > 4 \\ y^2 \leq 9\,. \end{cases}$$

ii) Verificate analiticamente se $(-1,0) \in A$.
iii) Determinate l'equazione delle rette orizzontali che non intersecano mai l'insieme A.

---

b3) i) Determinate $q \in \mathbb{R}$ tale che la retta r di equazione $y = -2x + q$ tocca la parabola $\mathcal{P}$ di equazione $y = -x^2 + 4x - 3$ in uno ed un solo punto S.
ii) Determinate S. Rappresentate graficamente r e $\mathcal{P}$.
iii) Scrivete l'equazione della retta r' perpendicolare alla retta r e passante per S. Rappresentatela graficamente nello stesso sistema di riferimento del punto ii).
iv) Scrivete l'equazione della circonferenza di centro il vertice della parabola $\mathcal{P}$ e passante per S.

---

b4) Siano dati gli insiemi A e B definiti da

$$A = \{x \in \mathbb{R} : \frac{x(x^2 - 3x)}{x+2} < 0\}\,, \qquad B = \{x \in \mathbb{R} : \frac{x^2 + 3x}{x^2 + 1} \leq 1\}\,.$$

i) Determinate A e B e rappresentateli sulla retta reale. Dite se sono insiemi disgiunti.
ii) Determinate gli insiemi $A \cup B$ e $\mathbb{R} \setminus B$.
iii) Determinate, se esistono, il minimo e il massimo di B.
iv) Rappresentate graficamente nel piano cartesiano l'insieme $A \times B$.

---

b5) Siano $f : [-5,5] \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ le funzioni definite da

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{se } -5 \leq x \leq -2 \\ -(x+1)^2 + 3 & \text{se } -2 < x < 1 \\ \sqrt{x-1} - 1 & \text{se } 1 \leq x \leq 5 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{x} & \text{se } x < -1 \\ -x & \text{se } -1 \leq x \leq 1 \\ (x-2)^3 & \text{se } x > 1\,. \end{cases}$$

i) Rappresentate graficamente f e g.
ii) Determinate l'immagine di f. Determinate, se esistono, il massimo e il minimo (risp. i punti di massimo e i punti di minimo) di f su $[-5,5]$.
iii) Dite, motivando la risposta, se g è iniettiva.
iv) Rappresentate graficamente, nel suo dominio, la funzione $x \mapsto -f(x+1)$.
v) Calcolate, se esistono, $(f+g)(0)$, $(fg)(2)$, e $(g \circ f)(1)$.
vi) Determinate, per $x \in [1,5]$, l'espressione della funzione $(g \circ f)(x)$.

Cognome ______________________

Nome ______________________

Matricola

Non scrivere qui

1	2	3	4	5

B

Università di Trento — Dip. di Psicologia e Scienze Cognitive

CdL in Scienze e Tecniche di Psicologia Cognitiva

Prima prova intermedia di Analisi Matematica

A.A. 2013-2014 — Rovereto, 31 Ottobre 2013

Riempite immediatamente questo foglio scrivendo in stampatello cognome, nome e numero di matricola. Scrivete cognome e nome (in stampatello) su ogni foglio a quadretti. Il tempo massimo per svolgere la prova è di **DUE ORE E MEZZA**.
IL SUPERAMENTO DEI PRIMI 10 ESERCIZI È CONDIZIONE NECESSARIA PERCHÈ LA SECONDA PARTE DEL COMPITO VENGA VALUTATA.
È obbligatorio consegnare sia il testo, sia tutti i fogli ricevuti; al momento della consegna, inserite tutti gli altri fogli, compreso quello con il testo, dentro uno dei fogli a quadretti.
Potete usare solo il vostro materiale di scrittura e il vostro materiale di studio. Non usate il colore rosso.

a1) Siano dati gli insiemi $A =]-\infty, 2[$ e $B = [0, 1[$. Determinate l'insieme $A \setminus B$.

Risposta:

a2) Sia $A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 > 1\}$. Dite quali delle seguenti affermazioni sono vere e quali sono false:

(i) A è limitato inferiormente; (ii) $]-2, -1[\in \mathcal{P}(A)$; (iii) $-2 \in A$; (iv) $\min A = 1$.

Risposta:

a3) Scrivete la negazione della seguente proposizione: "C'è almeno uno studente iscritto nell'a.a. corrente al primo anno del CdL in STPC che non si è iscritto alla Prima Prova Intermedia di Analisi Matematica o non si è presentato alla prova".

Risposta:

a4) Determinate tutti gli $a \in \mathbb{R}$ tali che l'equazione $ax^2 - 3x + 1 = 0$ ha due soluzioni.

Risposta:

a5) Rappresentate graficamente $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \le x^2 < 4\,, \quad y = -x\}\,.$

Risposta:

a6) Scrivete l'equazione della retta r passante per i punti $P = (-1, 2)$ e $Q = (3, 2)\,.$

Risposta:

a7) Rappresentate graficamente nel piano cartesiano l'insieme E delle coppie $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ soddisfacenti $x^2 + 2x \le y \le 0\,.$

Risposta:

a8) Risolvete in $\mathbb{R}$ la seguente disequazione $\dfrac{x^2 + 1}{x + 2} \ge 0\,.$

Risposta:

a9) Sia $f : [-2, 1] \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{se } -2 \le x < 0 \\ -1 & \text{se } 0 \le x \le 1\,. \end{cases}$$

Determinate l'immagine di f .

Risposta:

a10) Siano $f\,, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ le funzioni definite da

$$f(x) = \begin{cases} -2x^2 & \text{se } x < 1 \\ \dfrac{3}{x} & \text{se } x \ge 1 \end{cases} \qquad\qquad g(x) = \sqrt[3]{x}\,.$$

Determinate $(f - g)(-1)$ e $(fg)(1)\,.$

Risposta:

b1) i) Scrivete la negazione della seguente proposizione $\mathcal{A}$:

$$\forall x_1,\ x_2 \in \mathbb{Z}\,,\quad [(x_1 \neq x_2) \Longrightarrow (x_2 - x_1 > 0)]\,.$$

ii) Dite (motivando la risposta) quale delle due proposizioni è vera e quale è falsa.

---

b2) i) Rappresentate graficamente nel piano cartesiano l'insieme A delle coppie $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ soddisfacenti il seguente sistema di disequazioni

$$\begin{cases} x^2 - y^2 + 4y - 8 < 0 \\ 4x^2 + (y-2)^2 \geq 4 \\ -3 \leq y \leq 5\,. \end{cases}$$

ii) Verificate analiticamente se $(-3, 2) \in A$.
iii) Determinate l'equazione delle rette orizzontali che non intersecano mai l'insieme A.

---

b3) i) Determinate $q \in \mathbb{R}$ tale che la retta r di equazione $y = 2x + q$ tocca la parabola $\mathcal{P}$ di equazione $y = x^2 + 4x + 3$ in uno ed un solo punto S.
ii) Determinate S. Rappresentate graficamente r e $\mathcal{P}$.
iii) Scrivete l'equazione della retta r' perpendicolare alla retta r e passante per S. Rappresentatela graficamente nello stesso sistema di riferimento del punto ii).
iv) Scrivete l'equazione della circonferenza di centro il vertice della parabola $\mathcal{P}$ e passante per S.

---

b4) Siano dati gli insiemi A e B definiti da

$$A = \{x \in \mathbb{R} : \frac{x(x^2+2x)}{x-2} \leq 0\}\,, \qquad B = \{x \in \mathbb{R} : \frac{x^2+3x}{x^2+1} > 1\}\,.$$

i) Determinate A e B e rappresentateli sulla retta reale. Dite se sono insiemi disgiunti.
ii) Determinate gli insiemi $A \cup B$ e $\mathbb{R} \setminus A$.
iii) Determinate, se esistono, il minimo e il massimo di A.
iv) Rappresentate graficamente nel piano cartesiano l'insieme $A \times B$.

---

b5) Siano $f : [-5, 3] \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ le funzioni definite da

$$f(x) = \begin{cases} x+3 & \text{se } -5 \leq x \leq -2 \\ 2 & \text{se } -2 < x \leq 1 \\ 2(x-2)^2 & \text{se } 1 < x \leq 3 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{x^2} & \text{se } x < -1 \\ -\sqrt[3]{x} & \text{se } -1 \leq x \leq 1 \\ x-2 & \text{se } x > 1\,. \end{cases}$$

i) Rappresentate graficamente f e g.
ii) Determinate l'immagine di f. Determinate, se esistono, il massimo e il minimo (risp. i punti di massimo e i punti di minimo) di f su $[-5, 3]$.
iii) Dite, motivando la risposta, se g è iniettiva.
iv) Rappresentate graficamente, nel suo dominio, la funzione $x \mapsto -f(x) + 1$.
v) Calcolate, se esistono, $(f+g)(0)$, $(fg)(3)$, e $(g \circ f)(1)$.
vi) Determinate, per $x \in]-2, 1]$, l'espressione della funzione $(g \circ f)(x)$.

COGNOME	____________	NON SCRIVERE QUI	C
NOME	____________	1 2 3 4 5	
MATRICOLA	⌊_⌊_⌊_⌊_⌊_⌊_⌋		

Università di Trento — Dip. di Psicologia e Scienze Cognitive

CdL in Scienze e Tecniche di Psicologia Cognitiva

Prima prova intermedia di Analisi Matematica

A.A. 2013-2014 — Rovereto, 31 Ottobre 2013

Riempite immediatamente questo foglio scrivendo in stampatello cognome, nome e numero di matricola. Scrivete cognome e nome (in stampatello) su ogni foglio a quadretti. Il tempo massimo per svolgere la prova è di **DUE ORE E MEZZA**.
IL SUPERAMENTO DEI PRIMI 10 ESERCIZI È CONDIZIONE NECESSARIA PERCHÈ LA SECONDA PARTE DEL COMPITO VENGA VALUTATA.
È obbligatorio consegnare sia il testo, sia tutti i fogli ricevuti; al momento della consegna, inserite tutti gli altri fogli, compreso quello con il testo, dentro uno dei fogli a quadretti.
Potete usare solo il vostro materiale di scrittura e il vostro materiale di studio. Non usate il colore rosso.

a1) Siano dati gli insiemi $A =]0,1]$ e $B =]-\infty, 4]$. Determinate l'insieme $B \setminus A$.

Risposta:

a2) Sia $A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 \leq 4\}$. Dite quali delle seguenti affermazioni sono vere e quali sono false:

(i) $\max A = 2$; (ii) $]-1,0[\subset \mathcal{P}(A)$; (iii) A è un intervallo; (iv) non esiste $\min A$.

Risposta:

a3) Scrivete la negazione della seguente proposizione: "C'è almeno uno studente iscritto nell'a.a. corrente al primo anno del CdL in STPC che si è iscritto alla Prima Prova Intermedia di Analisi Matematica e non si è presentato alla prova".

Risposta:

a4) Determinate tutti gli $a \in \mathbb{R}$ tali che l'equazione $ax^2 - 2x - 2 = 0$ ha due soluzioni.

Risposta:

a5) Rappresentate graficamente $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 < 4\,, \quad y = x\}$.

Risposta:

a6) Scrivete l'equazione della retta r passante per i punti $P = (-2, 2)$ e $Q = (-2, 3)$.

Risposta:

a7) Rappresentate graficamente nel piano cartesiano l'insieme E delle coppie $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ soddisfacenti $x^2 - 2x \leq y \leq 0$.

Risposta:

a8) Risolvete in $\mathbb{R}$ la seguente disequazione $\dfrac{x^2+1}{x-2} \leq 0$.

Risposta:

a9) Sia $f : [-2, 1] \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x) = \begin{cases} -2 & \text{se } -2 \leq x \leq -1 \\ x+1 & \text{se } -1 < x \leq 1\,. \end{cases}$$

Determinate l'immagine di f.

Risposta:

a10) Siano $f\,, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ le funzioni definite da

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{x} & \text{se } x \leq -1 \\ \sqrt[3]{x} & \text{se } x > -1 \end{cases} \qquad\qquad g(x) = x^2\,.$$

Determinate $(f+g)(-1)$ e $(\dfrac{f}{g})(1)$.

Risposta:

b1) i) Scrivete la negazione della seguente proposizione $\mathcal{A}$:

$$\forall x_1,\ x_2 \in \mathbb{Z}\,, \quad [(x_1 \neq x_2) \Longrightarrow (x_2 - x_1 < 0)]\,.$$

ii) Dite (motivando la risposta) quale delle due proposizioni è vera e quale è falsa.

---

b2) i) Rappresentate graficamente nel piano cartesiano l'insieme A delle coppie $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ soddisfacenti il seguente sistema di disequazioni

$$\begin{cases} -x^2 + y^2 - 4y < 0 \\ x^2 + 4(y-2)^2 \geq 4 \\ x^2 \leq 9\,. \end{cases}$$

ii) Verificate analiticamente se $(0, 3) \in A$.
iii) Determinate l'equazione delle rette verticali che non intersecano mai l'insieme A.

---

b3) i) Determinate $q \in \mathbb{R}$ tale che la retta r di equazione $y = 2x + q$ tocca la parabola $\mathcal{P}$ di equazione $y = -x^2 - 4x - 3$ in uno ed un solo punto S.
ii) Determinate S. Rappresentate graficamente r e $\mathcal{P}$.
iii) Scrivete l'equazione della retta r' perpendicolare alla retta r e passante per S. Rappresentatela graficamente nello stesso sistema di riferimento del punto ii).
iv) Scrivete l'equazione della circonferenza di centro il vertice della parabola $\mathcal{P}$ e passante per S.

---

b4) Siano dati gli insiemi A e B definiti da

$$A = \{x \in \mathbb{R} : \frac{x(x^2 + 3x)}{x - 3} < 0\}\,, \qquad B = \{x \in \mathbb{R} : \frac{x^2 - 2x}{x^2 + 1} \leq 1\}\,.$$

i) Determinate A e B e rappresentateli sulla retta reale. Dite se sono insiemi disgiunti.
ii) Determinate gli insiemi $A \cup B$ e $\mathbb{R} \setminus B$.
iii) Determinate, se esistono, il minimo e il massimo di B.
iv) Rappresentate graficamente nel piano cartesiano l'insieme $A \times B$.

---

b5) Siano $f : [-5, 5] \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ le funzioni definite da

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } -5 \leq x \leq -2 \\ -(x+1)^2 + 1 & \text{se } -2 < x < 1 \\ \sqrt{x-1} - 3 & \text{se } 1 \leq x \leq 5 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{se } x \leq -1 \\ x & \text{se } -1 < x \leq 1 \\ -(x-2)^3 & \text{se } x > 1\,. \end{cases}$$

i) Rappresentate graficamente f e g.
ii) Determinate l'immagine di f. Determinate, se esistono, il massimo e il minimo (risp. i punti di massimo e i punti di minimo) di f su $[-5, 5]$.
iii) Dite, motivando la risposta, se g è iniettiva.
iv) Rappresentate graficamente, nel suo dominio, la funzione $x \mapsto -g(x+1)$.
v) Calcolate, se esistono, $(f+g)(0)$, $(fg)(5)$, e $(g \circ f)(1)$.
vi) Determinate, per $x \in [1, 5]$, l'espressione della funzione $(g \circ f)(x)$.

Cognome ______________ Nome ______________ Matricola ⌴⌴⌴⌴⌴⌴	Non scrivere qui 1 2 3 4 5 D

Università di Trento — Dip. di Psicologia e Scienze Cognitive

CdL in Scienze e Tecniche di Psicologia Cognitiva

Prima prova intermedia di Analisi Matematica

A.A. 2013-2014 — Rovereto, 31 Ottobre 2013

Riempite immediatamente questo foglio scrivendo in stampatello cognome, nome e numero di matricola. Scrivete cognome e nome (in stampatello) su ogni foglio a quadretti. Il tempo massimo per svolgere la prova è di **DUE ORE E MEZZA**.
IL SUPERAMENTO DEI PRIMI 10 ESERCIZI È CONDIZIONE NECESSARIA PERCHÈ LA SECONDA PARTE DEL COMPITO VENGA VALUTATA.
È obbligatorio consegnare sia il testo, sia tutti i fogli ricevuti; al momento della consegna, inserite tutti gli altri fogli, compreso quello con il testo, dentro uno dei fogli a quadretti.
Potete usare solo il vostro materiale di scrittura e il vostro materiale di studio. Non usate il colore rosso.

a1) Siano dati gli insiemi $A = [1, 2[$ e $B =]0, +\infty[$. Determinate l'insieme $B \setminus A$.

Risposta:

a2) Sia $A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 > 4\}$. Dite quali delle seguenti affermazioni sono vere e quali sono false:

(i) $\min A = 2$; (ii) $]2, +\infty[\in \mathcal{P}(A)$; (iii) A non limitato; (iv) A è un intervallo.

Risposta:

a3) Scrivete la negazione della seguente proposizione: "Tutti gli studenti presenti alla Prima Prova Intermedia di Analisi Matematica sono iscritti nell'a.a. corrente al CdL in STPC o al CdL in ITC".

Risposta:

a4) Determinate tutti gli $a \in \mathbb{R}$ tali che l'equazione $ax^2 - x + 3 = 0$ ha due soluzioni.

Risposta:

a5) Rappresentate graficamente $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x^2 \leq 4\,, \quad y = -x\}\,.$

Risposta:

a6) Scrivete l'equazione della retta r passante per i punti $P = (-2, -4)$ e $Q = (-1, -4)\,.$

Risposta:

a7) Rappresentate graficamente nel piano cartesiano l'insieme E delle coppie $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ soddisfacenti $0 \leq y \leq -x^2 - 2x\,.$

Risposta:

a8) Risolvete in $\mathbb{R}$ la seguente disequazione $\dfrac{x^2+1}{x-3} \geq 0\,.$

Risposta:

a9) Sia $f : [-2, 1] \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x) = \begin{cases} 3 & \text{se } -2 \leq x \leq -1 \\ -x+1 & \text{se } -1 < x \leq 1\,. \end{cases}$$

Determinate l'immagine di f .

Risposta:

a10) Siano $f\,, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ le funzioni definite da

$$f(x) = \begin{cases} -\sqrt[3]{x} & \text{se } x < 1 \\ \dfrac{4}{x} & \text{se } x \geq 1 \end{cases} \qquad g(x) = x^4\,.$$

Determinate $(f - g)(-1)$ e $(\dfrac{f}{g})(1)\,.$

Risposta:

b1) i) Scrivete la negazione della seguente proposizione $\mathcal{A}$:

$$\forall x_1,\ x_2 \in \mathbb{R}\,, \quad [(x_1 \neq x_2) \Longrightarrow (x_1^4 \neq x_2^4)]\,.$$

ii) Dite (motivando la risposta) quale delle due proposizioni è vera e quale è falsa.

---

b2) i) Rappresentate graficamente nel piano cartesiano l'insieme A delle coppie $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ soddisfacenti il seguente sistema di dissecazioni

$$\begin{cases} -x^2 + y^2 + 4x - 8 \leq 0 \\ (x-2)^2 + 4y^2 > 4 \\ -2 \leq x \leq 6\,. \end{cases}$$

ii) Verificate analiticamente se $(2,3) \in A$.
iii) Determinate l'equazione delle rette verticali che non intersecano mai l'insieme A.

---

b3) i) Determinate $q \in \mathbb{R}$ tale che la retta r di equazione $y = -2x + q$ tocca la parabola $\mathcal{P}$ di equazione $y = -x^2 - 4x - 3$ in uno ed un solo punto S.
ii) Determinate S. Rappresentate graficamente r e $\mathcal{P}$.
iii) Scrivete l'equazione della retta r' perpendicolare alla retta r e passante per S. Rappresentatela graficamente nello stesso sistema di riferimento del punto ii).
iv) Scrivete l'equazione della circonferenza di centro il vertice della parabola $\mathcal{P}$ e passante per S.

---

b4) Siano dati gli insiemi A e B definiti da

$$A = \{x \in \mathbb{R} : \frac{x(x^2-2x)}{x+3} \leq 0\}\,, \qquad B = \{x \in \mathbb{R} : \frac{x^2-2x}{x^2+1} > 1\}\,.$$

i) Determinate A e B e rappresentateli sulla retta reale. Dite se sono insiemi disgiunti.
ii) Determinate gli insiemi $A \cup B$ e $\mathbb{R} \setminus A$.
iii) Determinate, se esistono, il minimo e il massimo di A.
iv) Rappresentate graficamente nel piano cartesiano l'insieme $A \times B$.

---

b5) Siano $f : [-5,3] \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ le funzioni definite da

$$f(x) = \begin{cases} -x-3 & \text{se } -5 \leq x \leq -2 \\ -2 & \text{se } -2 < x \leq 1 \\ -2(x-2)^2 & \text{se } 1 < x \leq 3 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{x^2} & \text{se } x < -1 \\ \sqrt[3]{x} & \text{se } -1 \leq x \leq 1 \\ -x+2 & \text{se } x > 1\,. \end{cases}$$

i) Rappresentate graficamente f e g.
ii) Determinate l'immagine di f. Determinate, se esistono, il massimo e il minimo (risp. i punti di massimo e i punti di minimo) di f su $[-5,3]$.
iii) Dite, motivando la risposta, se g è iniettiva.
iv) Rappresentate graficamente, nel suo dominio, la funzione $x \mapsto -g(x) + 1$.
v) Calcolate, se esistono, $(f+g)(0)$, $(fg)(3)$, e $(g \circ f)(1)$.
vi) Determinate, per $x \in]-2,1]$. l'espressione della funzione $(g \circ f)(x)$.
