

COGNOME _____

NOME _____

MATRICOLA |_|_|_|_|_|_|_|_|

NON SCRIVERE QUI

A

1	2	3	4	5	6
---	---	---	---	---	---

UNIVERSITÀ DI TRENTO — DIP. DI PSICOLOGIA E SCIENZE COGNITIVE
CdL IN SCIENZE E TECNICHE DI PSICOLOGIA COGNITIVA
SECONDA PROVA INTERMEDIA DI ANALISI MATEMATICA
A.A. 2013-2014 — ROVERETO, 19 DICEMBRE 2013

Riempite immediatamente questo foglio scrivendo in stampatello cognome, nome e numero di matricola. Scrivete cognome e nome (in stampatello) su ogni foglio a quadretti. Il tempo massimo per svolgere la prova è di **TRE ORE**.

Non potete uscire se non dopo avere consegnato il compito, al termine della prova.

È obbligatorio consegnare sia il testo, sia tutti i fogli ricevuti; al momento della consegna, inserite tutti gli altri fogli, compreso quello con il testo, dentro uno dei fogli a quadretti.

Potete usare solo il vostro materiale di scrittura e il vostro materiale di studio. Non usate il colore rosso.

1) i) Calcolate

$$\int_1^3 \frac{x^3 + 2\sqrt[3]{x} + 1}{x} dx; \quad \int_{-2}^2 (||x + 2| - 1| + 1) dx.$$

ii) Calcolate l'area della regione piana E delimitata dal grafico della funzione $f(x) = \frac{4}{x}$ e dalla retta di equazione $y + x - 5 = 0$.

iii) Calcolate $\sum_{n=1}^3 \left[\int_0^1 \frac{2x}{(x^2 + 1)^n} dx \right]$.

iv) Scrivete l'espressione $x_2 - x_4 + \frac{x_6}{2!} - \dots + \frac{x_{30}}{14!}$ usando il simbolo di sommatoria.

2) Sia $f : [-5, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{4} & \text{se } -5 \leq x < -4 \\ 2\sqrt{x+4} & \text{se } -4 \leq x \leq 0 \\ -(x+1)^2 + 5 & \text{se } 0 < x \leq 2. \end{cases}$$

i) Rappresentate nel piano cartesiano il grafico di f .

ii) Provate che f è continua in $x = -4$ e in $x = 0$.

iii) Verificate se f soddisfa le ipotesi del teorema di esistenza degli zeri su $[-5, 2]$.

iv) Determinate gli eventuali massimi/minimi locali (risp. punti di massimo/minimo locale) di f su $[-5, 2]$.

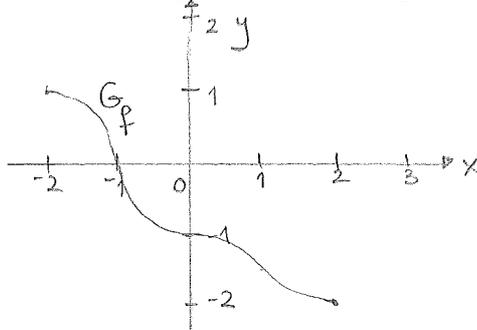
v) Calcolate $\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(h) - f(0)}{h}$ e $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h}$. Dite se f è derivabile in $x_0 = 0$.

vi) Determinate l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto di coordinata $x_0 = -3$ e rappresentatela nello stesso sistema di riferimento della f .

3) Risolvete in \mathbb{R} le seguenti disequazioni:

$$||x^2 - 1| - 2| > 1; \quad \left(\frac{1}{2}\right)^{|x+2|} \cdot 2^{x^2} < 1; \quad \log_3(4 - |x|) - \log_{\frac{1}{3}}|x| \leq 1.$$

4) Sia $f : [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione rappresentata in figura.



Sia $F : [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione integrale di f definita da $F(x) = \int_{-2}^x f(t) dt$.

- Determinate gli intervalli di monotonia della funzione F .
- Provate che $\max_{x \in [-2, 2]} F(x) > \frac{1}{2}$.
- Tracciate un grafico qualitativo della funzione F dopo aver individuato gli intervalli di convessità/concavità della funzione F .
- Determinate il più grande intervallo $[a, b] \subset [-2, 2]$ tale che $F(x)$ ristretta ad $[a, b]$ risulti iniettiva.

5) i) Studiate (insieme di definizione, segno, comportamento agli estremi dell'insieme di definizione, continuità, derivabilità, punti critici e monotonia) la funzione definita da

$$f(x) = \frac{(x-1)^3}{e^x}$$

e rappresentatela graficamente nel piano cartesiano.

- Verificate che $F(x) = [-(x-1)^3 - 3(x-1)^2 - 6(x-1) - 6]e^{-x}$ è una primitiva di $f(x)$ per ogni $x \in \text{dom} f$.
- Determinate l'area della regione piana E delimitata dal grafico di f , dalla retta di equazione $y = -x + 1$ e dalla retta di equazione $x = 0$.

6) Un editore deve stampare un libro di fiabe. Se il libro contiene 20 fiabe e 5 di queste devono sempre trovarsi all'inizio del libro con ordine però non fissato, quanti sono i possibili modi in cui il libro può essere composto?

COGNOME _____
NOME _____
MATRICOLA: |_|_|_|_|_|_|_|_|

NON SCRIVERE QUI

B

|_|_|_|_|_|_|_|
1 2 3 4 5 6

UNIVERSITÀ DI TRENTO — DIP. DI PSICOLOGIA E SCIENZE COGNITIVE
CdL IN SCIENZE E TECNICHE DI PSICOLOGIA COGNITIVA
SECONDA PROVA INTERMEDIA DI ANALISI MATEMATICA
A.A. 2013-2014 — ROVERETO, 19 DICEMBRE 2013

Riempite immediatamente questo foglio scrivendo in stampatello cognome, nome e numero di matricola. Scrivete cognome e nome (in stampatello) su ogni foglio a quadretti. Il tempo massimo per svolgere la prova è di **TRE ORE**.

Non potete uscire se non dopo avere consegnato il compito, al termine della prova.

È obbligatorio consegnare sia il testo, sia tutti i fogli ricevuti; al momento della consegna, inserite tutti gli altri fogli, compreso quello con il testo, dentro uno dei fogli a quadretti.

Potete usare solo il vostro materiale di scrittura e il vostro materiale di studio. Non usate il colore rosso.

1) i) Calcolate

$$\int_{-3}^3 (||x+1| - 2| - 1) dx; \quad \int_1^2 \frac{x^4 + 3\sqrt[3]{x} - 1}{x} dx.$$

ii) Calcolate l'area della regione piana delimitata dal grafico della funzione $f(x) = \frac{4}{x}$ e dalla retta di equazione $y + x + 5 = 0$.

iii) Calcolate $\sum_{n=1}^3 [\int_0^1 \frac{1}{(x+3)^n} dx]$.

iv) Scrivete l'espressione $-x_3 + x_6 - \frac{x_9}{2!} + \dots + \frac{x_{30}}{9!}$ usando il simbolo di sommatoria.

2) Sia $f : [-5, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x} - \frac{1}{4} & \text{se } -5 \leq x < -4 \\ 2\sqrt{x+4} & \text{se } -4 \leq x \leq 0 \\ -(x-1)^2 + 5 & \text{se } 0 < x \leq 2. \end{cases}$$

i) Rappresentate nel piano cartesiano il grafico di f .

ii) Provate che f è continua in $x = -4$ e in $x = 0$.

iii) Verificate se f soddisfa le ipotesi del teorema di esistenza degli zeri su $[-5, 2]$.

iv) Determinate gli eventuali massimi/minimi locali (risp. punti di massimo/minimo locale) di f su $[-5, 2]$.

v) Calcolate $\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(h) - f(0)}{h}$ e $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h}$. Dite se f è derivabile in $x_0 = 0$.

vi) Determinate l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto di coordinata $x_0 = -3$ e rappresentatela nello stesso sistema di riferimento della f .

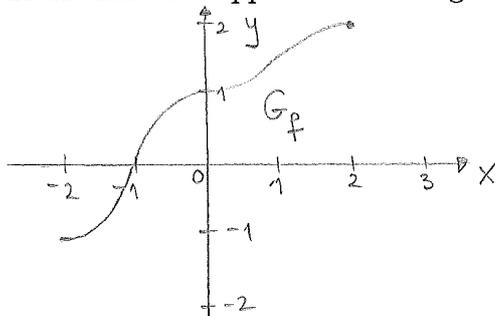
3) Risolvete in \mathbb{R} le seguenti disequazioni:

$$||x^2 - 1| - 2| \leq 1;$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{|x+2|} \cdot 3^{x^2} > 1;$$

$$\log_4(5 - |x|) - \log_{\frac{1}{4}} |x| \leq 1.$$

4) Sia $f : [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione rappresentata in figura.



Sia $F : [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione integrale di f definita da $F(x) = \int_{-2}^x f(t) dt$.

i) Determinate gli intervalli di monotonia della funzione F .

ii) Provate che $\min_{x \in [-2, 2]} F(x) < -\frac{1}{2}$;

iii) Tracciate un grafico qualitativo della funzione F dopo aver individuato gli intervalli di convessità/concavità della funzione F .

iv) Determinate il più grande intervallo $[a, b] \subset [-2, 2]$ tale che $F(x)$ ristretta ad $[a, b]$ risulti iniettiva.

5) i) Studiate (insieme di definizione, segno, comportamento agli estremi dell'insieme di definizione, continuità, derivabilità, punti critici e monotonia) la funzione definita da

$$f(x) = -\frac{(x-1)^3}{e^x}$$

e rappresentatela graficamente nel piano cartesiano.

ii) Verificate che $F(x) = [(x-1)^3 + 3(x-1)^2 + 6(x-1) + 6]e^{-x}$ è una primitiva di $f(x)$ per ogni $x \in \text{dom} f$.

iii) Determinate l'area della regione piana E delimitata dal grafico di f , dalla retta di equazione $y = x - 1$ e dalla retta di equazione $x = 0$.

6) Un editore deve stampare un libro di poesie. Se il libro contiene 25 poesie e 4 di queste devono sempre trovarsi all'inizio del libro con ordine però non fissato, quanti sono i possibili modi in cui il libro può essere composto?

COGNOME _____

NOME _____

MATRICOLA

--	--	--	--	--	--

NON SCRIVERE QUI

1	2	3	4	5	6
---	---	---	---	---	---

C

UNIVERSITÀ DI TRENTO — DIP. DI PSICOLOGIA E SCIENZE COGNITIVE
CDL IN SCIENZE E TECNICHE DI PSICOLOGIA COGNITIVA
SECONDA PROVA INTERMEDIA DI ANALISI MATEMATICA
A.A. 2013-2014 — ROVERETO, 19 DICEMBRE 2013

Riempite immediatamente questo foglio scrivendo in stampatello cognome, nome e numero di matricola. Scrivete cognome e nome (in stampatello) su ogni foglio a quadretti. Il tempo massimo per svolgere la prova è di **TRE ORE**.

Non potete uscire se non dopo avere consegnato il compito, al termine della prova.

È obbligatorio consegnare sia il testo, sia tutti i fogli ricevuti; al momento della consegna, inserite tutti gli altri fogli, compreso quello con il testo, dentro uno dei fogli a quadretti.

Potete usare solo il vostro materiale di scrittura e il vostro materiale di studio. Non usate il colore rosso.

1) i) Calcolate

$$\int_1^2 \frac{x^4 - 2\sqrt[3]{x} + x}{x^2} dx; \quad \int_{-1}^4 (||x - 3| - 2| + 1) dx.$$

ii) Calcolate l'area della regione piana delimitata dal grafico della funzione $f(x) = -\frac{4}{x}$ e dalla retta di equazione $y - x + 5 = 0$.

iii) Calcolate $\sum_{n=1}^3 \left[\int_{-1}^0 \frac{2x}{(x^2 + 1)^n} dx \right]$.

iv) Scrivete l'espressione $-\frac{x_2}{2!} + \frac{x_4}{3!} - \frac{x_6}{4!} + \dots - \frac{x_{30}}{16!}$ usando il simbolo di sommatoria.

2) Sia $f : [-5, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{4} & \text{se } -5 \leq x < -4 \\ -2\sqrt{x+4} & \text{se } -4 \leq x \leq 0 \\ (x+1)^2 - 5 & \text{se } 0 < x \leq 2. \end{cases}$$

i) Rappresentate nel piano cartesiano il grafico di f .

ii) Provate che f è continua in $x = -4$ e in $x = 0$.

iii) Verificate se f soddisfa le ipotesi del teorema di esistenza degli zeri su $[-5, 2]$.

iv) Determinate gli eventuali massimi/minimi locali (risp. punti di massimo/minimo locale) di f su $[-5, 2]$.

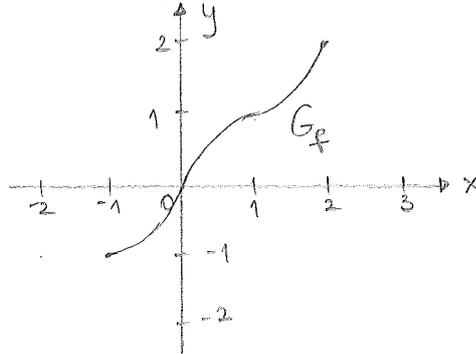
v) Calcolate $\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(h) - f(0)}{h}$ e $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h}$. Dite se f è derivabile in $x_0 = 0$.

vi) Determinate l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto di coordinata $x_0 = -3$ e rappresentatela nello stesso sistema di riferimento della f .

3) Risolvete in \mathbb{R} le seguenti disequazioni:

$$||x^2 - 1| - 1| > 2; \quad \left(\frac{1}{2}\right)^{|x+2|} \cdot 2^{x^2} \leq 1; \quad \log_4(5 - |x|) - \log_{\frac{1}{4}} |x| > 1.$$

4) Sia $f : [-1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione rappresentata in figura.



Sia $F : [-1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione integrale di f definita da $F(x) = \int_{-1}^x f(t) dt$.

- Determinate gli intervalli di monotonia della funzione F .
- Provate che $\min_{x \in [-1, 2]} F(x) < -\frac{1}{2}$;
- Tracciate un grafico qualitativo della funzione F dopo aver individuato gli intervalli di convessità/concavità della funzione F .
- Determinate il più grande intervallo $[a, b] \subset [-1, 2]$ tale che $F(x)$ ristretta ad $[a, b]$ risulti iniettiva.

5) i) Studiate (insieme di definizione, segno, comportamento agli estremi dell'insieme di definizione, continuità, derivabilità, punti critici e monotonia) la funzione definita da

$$f(x) = (x - 1)^3 e^x$$

e rappresentatela graficamente nel piano cartesiano.

- Verificate che $F(x) = [(x - 1)^3 - 3(x - 1)^2 + 6(x - 1) - 6]e^x$ è una primitiva di $f(x)$ per ogni $x \in \text{dom} f$.
- Determinate l'area della regione piana E delimitata dal grafico di f , dalla retta di equazione $y = -x + 1$ e dalla retta di equazione $x = 0$.

6) Un editore deve stampare un libro di poesie. Se il libro contiene 25 poesie e 7 di queste devono sempre trovarsi all'inizio del libro con ordine però non fissato, quanti sono i possibili modi in cui il libro può essere composto?

COGNOME _____

NOME _____

MATRICOLA |_|_|_|_|_|_|_|_|

NON SCRIVERE QUI

D

1	2	3	4	5	6
---	---	---	---	---	---

UNIVERSITÀ DI TRENTO — DIP. DI PSICOLOGIA E SCIENZE COGNITIVE
CDL IN SCIENZE E TECNICHE DI PSICOLOGIA COGNITIVA

SECONDA PROVA INTERMEDIA DI ANALISI MATEMATICA

A.A. 2013-2014 — ROVERETO, 19 DICEMBRE 2013

Riempite immediatamente questo foglio scrivendo in stampatello cognome, nome e numero di matricola. Scrivete cognome e nome (in stampatello) su ogni foglio a quadretti. Il tempo massimo per svolgere la prova è di **TRE ORE**.

Non potete uscire se non dopo avere consegnato il compito, al termine della prova.

È obbligatorio consegnare sia il testo, sia tutti i fogli ricevuti; al momento della consegna, inserite tutti gli altri fogli, compreso quello con il testo, dentro uno dei fogli a quadretti.

Potete usare solo il vostro materiale di scrittura e il vostro materiale di studio. Non usate il colore rosso.

1) i) Calcolate

$$\int_{-1}^4 (||x - 1| - 3| + 2) dx; \quad \int_1^2 \frac{x^3 + 2\sqrt[3]{x} + x}{x^2} dx.$$

ii) Calcolate l'area della regione piana delimitata dal grafico della funzione $f(x) = -\frac{4}{x}$ e dalla retta di equazione $y - x - 5 = 0$.

iii) Calcolate $\sum_{n=1}^3 [\int_0^1 \frac{3}{(3x+1)^n} dx]$.

iv) Scrivete l'espressione $-x_2 + x_4 - \frac{x_6}{2!} + \dots - \frac{x_{30}}{14!}$ usando il simbolo di sommatoria.

2) Sia $f : [-6, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{4} & \text{se } -6 \leq x < -4 \\ \sqrt{x+4} & \text{se } -4 \leq x \leq 0 \\ (x+1)^2 + 1 & \text{se } 0 < x \leq 1. \end{cases}$$

i) Rappresentate nel piano cartesiano il grafico di f .

ii) Provate che f è continua in $x = -4$ e in $x = 0$.

iii) Verificate se f soddisfa le ipotesi del teorema di esistenza degli zeri su $[-6, 1]$.

iv) Determinate gli eventuali massimi/minimi locali (risp. punti di massimo/minimo locale) di f su $[-6, 1]$.

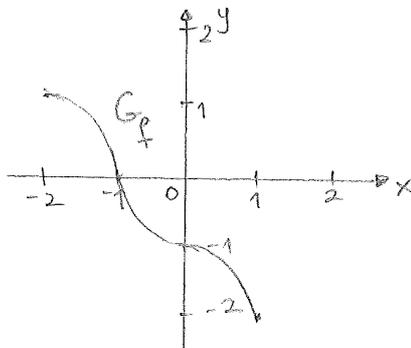
v) Calcolate $\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(h) - f(0)}{h}$ e $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h}$. Dite se f è derivabile in $x_0 = 0$.

vi) Determinate l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto di coordinata $x_0 = -3$ e rappresentatela nello stesso sistema di riferimento della f .

3) Risolvete in \mathbb{R} le seguenti disequazioni:

$$||x^2 - 1| - 2| \leq 2; \quad \left(\frac{1}{3}\right)^{|x+2|} \cdot 3^{x^2} \geq 1; \quad \log_3(4 - |x|) - \log_{\frac{1}{3}} |x| > 1.$$

4) Sia $f : [-2, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione rappresentata in figura.



Sia $F : [-2, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione integrale di f definita da $F(x) = \int_{-2}^x f(t) dt$.

- i) Determinate gli intervalli di monotonia della funzione F .
- ii) Provate che $\max_{x \in [-2, 1]} F(x) > \frac{1}{2}$.
- iii) Tracciate un grafico qualitativo della funzione F dopo aver individuato gli intervalli di convessità/concavità della funzione F .
- iv) Determinate il più grande intervallo $[a, b] \subset [-2, 1]$ tale che $F(x)$ ristretta ad $[a, b]$ risulti iniettiva.

5) i) Studiate (insieme di definizione, segno, comportamento agli estremi dell'insieme di definizione, continuità, derivabilità, punti critici e monotonia) la funzione definita da

$$f(x) = -(x - 1)^3 e^x$$

e rappresentatela graficamente nel piano cartesiano.

- ii) Verificate che $F(x) = [-(x - 1)^3 + 3(x - 1)^2 - 6(x - 1) + 6]e^x$ è una primitiva di $f(x)$ per ogni $x \in \text{dom} f$.
- iii) Determinate l'area della regione piana E delimitata dal grafico di f , dalla retta di equazione $y = x - 1$ e dalla retta di equazione $x = 0$.

6) Un editore deve stampare un libro di fiabe. Se il libro contiene 22 fiabe e 6 di queste devono sempre trovarsi all'inizio del libro con ordine però non fissato, quanti sono i possibili modi in cui il libro può essere composto?
