Cognome ______________	Non scrivere qui	A
Nome ______________	1 2 3 4 5 6	
Matricola		

Università di Trento — Dip. di Psicologia e Scienze Cognitive

CdL in Scienze e Tecniche di Psicologia Cognitiva

Esame scritto di Analisi Matematica

A.A. 2014-2015 — Rovereto, 9 Giugno 2015

Riempite immediatamente questo foglio scrivendo in stampatello cognome, nome e numero di matricola. Scrivete cognome e nome (in stampatello) su ogni foglio a quadretti. Il tempo massimo per svolgere la prova è di **DUE ORE E MEZZA**.
Non potete uscire se non dopo avere consegnato il compito, al termine della prova.
È obbligatorio consegnare sia il testo, sia tutti i fogli ricevuti; al momento della consegna, inserite tutti gli altri fogli, compreso quello con il testo, dentro uno dei fogli a quadretti.
Potete usare solo il vostro materiale di scrittura e il vostro materiale di studio. Non usate il colore rosso.

1) i) Scrivete la negazione della seguente proposizione (portando il **non** il più internamente possibile):

$$\mathcal{A} = \text{"}\forall a \in \mathbb{R}\,, \exists x \in \mathbb{R} : x^2 - 2x = a\text{"}\,.$$

Dite quale delle due proposizioni è vera e quale è falsa.

ii) Risolvete in $\mathbb{R}$ la disequazione $\log_2(|x-2| - x^2) \leq 2$.

2) Siano $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g : [-2, 3] \to \mathbb{R}$ le funzioni definite da

$$f(x) = \begin{cases} \left(\frac{1}{3}\right)^x & \text{se } x \leq -1 \\ x^2 - 2x & \text{se } -1 < x < 2 \\ 2\sqrt{x-1} & \text{se } x \geq 2\,; \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} |x| & \text{se } -2 \leq x \leq 2 \\ \dfrac{2}{x-1} & \text{se } 2 < x \leq 3\,. \end{cases}$$

i) Rappresentatele graficamente sul piano cartesiano.
ii) Determinate $g([-2, 3])$. Dite se g è iniettiva.
iii) Rappresentate graficamente, nei rispettivi domini, le funzioni $x \mapsto g(x-1)$ e $x \mapsto -2g(x) + 1$.
iv) Studiate la continuità di f nei punti $x = -1$ e $x = 2$.
v) Dite se f soddisfa le ipotesi del teorema di Weierstrass su $[-1, 5]$. Determinate, se esistono, il massimo e il minimo (risp. punti di massimo e punti di minimo) di f su $[-1, 5]$.

3) Siano $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ le funzioni definite da $f(x) = |x-1| - 2$ e $g(x) = x|x|$.
i) Rappresentate graficamente f e g.
ii) Determinate $(f \circ g)(-1)$ e $(g \circ f)(1)$.
iii) Calcolate $\lim_{h \to 0^-} \frac{g(h) - g(0)}{h}$ e $\lim_{h \to 0^+} \frac{g(h) - g(0)}{h}$ e dite se g è derivabile in $x_0 = 0$.
Rappresentate graficamente, dove esiste, la funzione derivata $g'(x)$.
iv) Calcolate $\sum_{n=1}^{4} \int_{n-1}^{n} f(x)\, dx$.

---

4) i) Studiate brevemente, al variare di $a \in \mathbb{R}$, il grafico della funzione

$$f_a(x) = x^2 + ax^3 .$$

e rappresentatelo nel piano cartesiano.
ii) Determinate, al variare di $a \in \mathbb{R}$, il limite $\lim_{x \to +\infty} \frac{f_a(x)}{e^{ax} + x^2}$.

---

5) i) Studiate (insieme di definizione, segno, comportamento agli estremi del dominio, asintoti, continuità, derivabilità, punti critici e monotonia, convessità/concavità) la funzione definita da

$$f(x) = \frac{2x+1}{x+2}$$

e rappresentatela graficamente nel piano cartesiano.
ii) Determinate l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto di coordinata $x_0 = 1$ e rappresentatela graficamente nello stesso sistema di riferimento della f.

---

6) È vero che per ogni $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ vale $\left(\sum_{i=1}^{2} (-1)^i a_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{2} a_i^2$?
Se no, esistono degli $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ tale che l'uguaglianza è vera?

COGNOME ______________________		NON SCRIVERE QUI	B
NOME ______________________			
MATRICOLA ⌊⌊⌊⌊⌊⌊⌋		1 2 3 4 5 6	

UNIVERSITÀ DI TRENTO — DIP. DI PSICOLOGIA E SCIENZE COGNITIVE

CDL IN SCIENZE E TECNICHE DI PSICOLOGIA COGNITIVA

ESAME SCRITTO DI ANALISI MATEMATICA

A.A. 2014-2015 — ROVERETO, 9 GIUGNO 2015

Riempite immediatamente questo foglio scrivendo in stampatello cognome, nome e numero di matricola. Scrivete cognome e nome (in stampatello) su ogni foglio a quadretti. Il tempo massimo per svolgere la prova è di **DUE ORE E MEZZA**.
Non potete uscire se non dopo avere consegnato il compito, al termine della prova.
È obbligatorio consegnare sia il testo, sia tutti i fogli ricevuti; al momento della consegna, inserite tutti gli altri fogli, compreso quello con il testo, dentro uno dei fogli a quadretti.
Potete usare solo il vostro materiale di scrittura e il vostro materiale di studio. Non usate il colore rosso.

1) i) Scrivete la negazione della seguente proposizione (portando il **non** il più internamente possibile):

$$\mathcal{A} = \text{"}\forall a \in \mathbb{R}\,, \exists x \in \mathbb{R} : x^2 + 2x = a\text{"}\,.$$

Dite quale delle due proposizioni è vera e quale è falsa.

ii) Risolvete in $\mathbb{R}$ la disequazione $\log_2(|x-6| - x^2) < 3\,.$

2) Siano $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g : [-2,3] \to \mathbb{R}$ le funzioni definite da

$$f(x) = \begin{cases} 3^{x+2} & \text{se } x \le -1 \\ x^2 - 2x & \text{se } -1 < x < 2 \\ 3\sqrt{x-1} & \text{se } x \ge 2\,; \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} -|x| & \text{se } -2 \le x \le 2 \\ \dfrac{3}{x-1} & \text{se } 2 < x \le 3\,. \end{cases}$$

i) Rappresentatele graficamente sul piano cartesiano.
ii) Determinate $g([-2,3])$. Dite se g è iniettiva.
iii) Rappresentate graficamente, nei rispettivi domini, le funzioni $x \mapsto g(x-1)$ e $x \mapsto -g(x) + 1$.
iv) Studiate la continuità di f nei punti $x = -1$ e $x = 2$.
v) Dite se f soddisfa le ipotesi del teorema di Weierstrass su $[-3,3]$. Determinate, se esistono, il massimo e il minimo (risp. punti di massimo e punti di minimo) di f su $[-3,3]$.

3) Siano $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ le funzioni definite da $f(x) = |x-2| - 1$ e $g(x) = x|x|$.
i) Rappresentate graficamente f e g.
ii) Determinate $(f \circ g)(-1)$ e $(g \circ f)(1)$.
iii) Calcolate $\lim_{h \to 0^-} \frac{g(h) - g(0)}{h}$ e $\lim_{h \to 0^+} \frac{g(h) - g(0)}{h}$ e dite se g è derivabile in $x_0 = 0$.
Rappresentate graficamente, dove esiste, la funzione derivata $g'(x)$.
iv) Calcolate $\sum_{n=1}^{4} \int_{n-1}^{n} f(x)\, dx$.

---

4) i) Studiate brevemente, al variare di $a \in \mathbb{R}$, il grafico della funzione

$$f_a(x) = x^3 + ax^2 .$$

e rappresentatelo nel piano cartesiano.
ii) Determinate, al variare di $a \in \mathbb{R}$, il limite $\lim_{x \to +\infty} \frac{f_a(x)}{e^{ax} + 2x^2}$.

---

5) i) Studiate (insieme di definizione, segno, comportamento agli estremi del dominio, asintoti, continuità, derivabilità, punti critici e monotonia, convessità/concavità) la funzione definita da

$$f(x) = \frac{2x-1}{1-x}$$

e rappresentatela graficamente nel piano cartesiano.
ii) Determinate l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto di coordinata $x_0 = 2$ e rappresentatela graficamente nello stesso sistema di riferimento della f.

---

6) È vero che per ogni $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ vale $\left(\sum_{i=1}^{2} (-1)^{i+1} a_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{2} a_i^2$?
Se no, esistono degli $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ tale che l'uguaglianza è vera?
