Università degli Studi di Trento — Dip. di Psicologia e Scienze Cognitive
CdL in Scienze e Tecniche di Psicologia Cognitiva
VERIFICA SETTIMANALE DI ANALISI MATEMATICA
a.a. 2014–2015 — Rovereto, 24–28 novembre (N. 10)

1) i) a) $f(x) = -\dfrac{2}{x-3}$ nel pt. $(1,1)$: $f'(x) = \dfrac{2}{(x-3)^2}$

eq. retta tg. al grafico di f in $(1,1)$: $y = 1 + \frac{1}{2}(x-1)$, ossia

$\underline{\underline{y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}}}$;

b) $g(x) = \sqrt[4]{x}$ nel pt. $(1,1)$: $g'(x) = \frac{1}{4}x^{-3/4}$

eq. retta tg. al grafico di g in $(1,1)$: $y = 1 + \frac{1}{4}(x-1)$, ossia

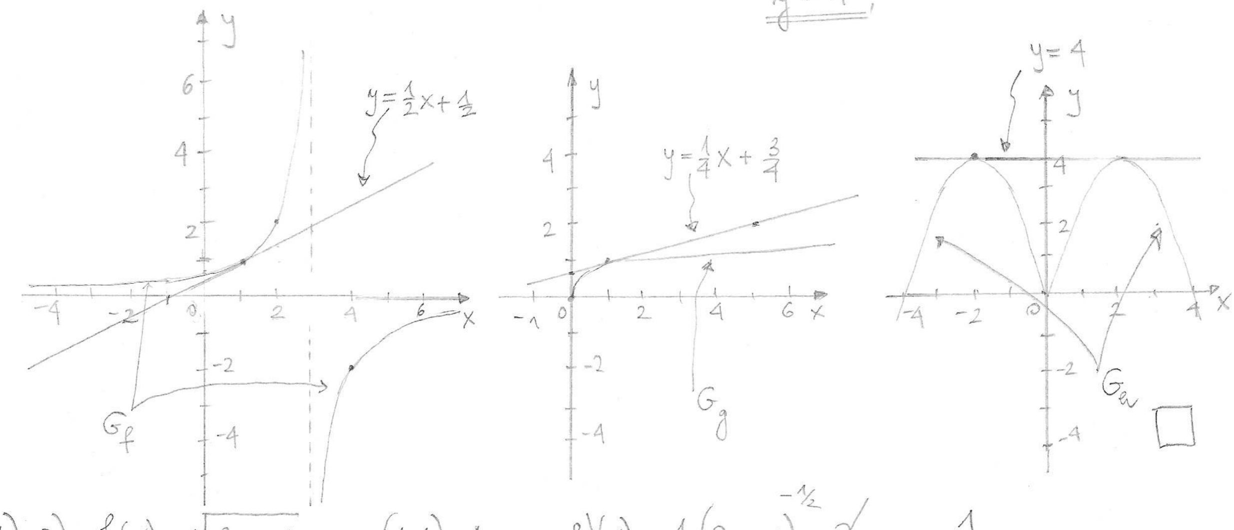
$\underline{\underline{y = \frac{1}{4}x + \frac{3}{4}}}$;

c) $h(x) = -x^2 + 4|x|$ nel pt. $(-2,4)$: $h'(x) = -2x - 4$

$[h(x) = -x^2 - 4x \quad \text{per } x < 0]$

eq. retta tg. al grafico di h in $(-2,4)$: $y = 4 + 0(x+2)$, ossia

$\underline{\underline{y = 4}}$;



ii) a) $f(x) = \sqrt{2x-1}$ $(1,1)$: $f'(x) = \frac{1}{\cancel{2}}(2x-1)^{-1/2} \cdot \cancel{2} = \dfrac{1}{\sqrt{2x-1}}$

La pendenza della retta tg. al grafico di f in $(1,1)$ è $f'(1) = \underline{\underline{1}}$.

b) $g(x) = (3x+1)\log(x+e)$ $(0,1)$: $g'(x) = 3\log(x+e) + (3x+1)\cdot\dfrac{1}{x+e}$

La pendenza della retta tg. al grafico di g in $(0,1)$ è $g'(0) = 3 + \frac{1}{e} = \underline{\underline{\dfrac{3e+1}{e}}}$.

c) $h(x) = -\dfrac{4}{(4x+1)^2}$ $\quad (0,-4)$: $\quad h'(x) = 32\,(4x+1)^{-3}$

La pendenza della retta tg. al grafico di h in $(0,-4)$ è $h'(0) = \underline{\underline{32}}$

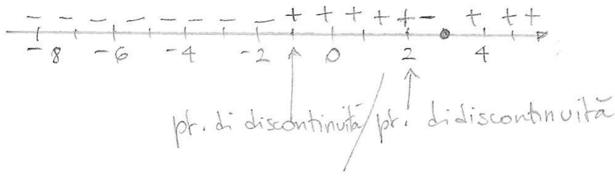
2) i) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \underline{\underline{0}}$; $\lim\limits_{x\to-1^-} f(x) = \underline{\underline{-2}}$; $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x) = \underline{\underline{2}}$;

$\lim\limits_{x\to2^-} f(x) = \underline{\underline{2}}$; $\lim\limits_{x\to2^+} f(x) = \underline{\underline{-\infty}}$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \underline{\underline{1}}$;

ii) punti di discontinuità di f : $x=-1$; infatti $\lim\limits_{x\to-1^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to-1^+} f(x)$;

: $x = 2$; infatti $\lim\limits_{x\to2^+} f(x) = -\infty$.

iii)



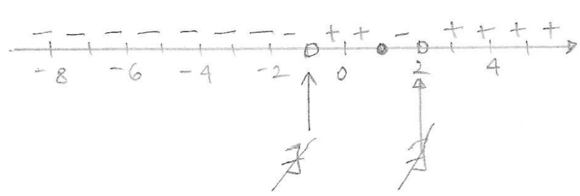
segno di f ;

iv) $\underline{x = 2}$ è asintoto verticale poichè $\lim\limits_{x\to2^+} f(x) = -\infty$;

$\underline{y=0}$ è asintoto orizzontale per f, per $x\to-\infty$, poichè $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$;

$\underline{y=1}$ è asintoto orizzontale per f, per $x\to+\infty$, poichè $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$;

v)



segno di f' ;

vi) $x = -1$, $x = 2$ pt. di minimo locale per f

$x = 1$ pt. di massimo locale per f ;

Solo nel pt. interno $x = 1$ dell'intervallo $[-1, 2]$ si annulla la derivata prima.

3) i) a) $(2x^3 + x^{-2})' = 6x^2 - 2x^{-3}$;

$\left(\dfrac{1}{2x^2} - 3x^4\right)' = -\dfrac{1}{x^3} - 12x^3$;

$\left(\dfrac{x^4}{x+3}\right)' = \dfrac{4x^3(x+3) - x^4}{(x+3)^2} = \dfrac{3x^4 + 12x^3}{(x+3)^2}$;

$\left(\dfrac{\sqrt[3]{x}}{x^2+1}\right)' = \dfrac{\frac{1}{3}x^{-2/3}(x^2+1) - \sqrt[3]{x}\cdot 2x}{(x^2+1)^2}$;

b) $\left[(x+3\log x)(x^{-1}+3^x)\right]' = \left(1+\frac{3}{x}\right)(x^{-1}+3^x) + (x+3\log x)\left(-\frac{1}{x^2}+3^x\log 3\right)$;

$\left[(x^{-3}+x^2)(e^x+x)\right]' = (-3x^{-4}+2x)(e^x+x) + (x^{-3}+x^2)(e^x+1)$;

$\left[(x^{-1/3}+\log_4 x)\,x^2\right]' = \left(-\frac{1}{3}x^{-4/3}+\frac{1}{x\log 4}\right)x^2 + (x^{-1/3}+\log_4 x)\,2x$. $\square$

ii) $\left[(3x+e^x)^6\right]' = 6(3x+e^x)^5(3+e^x)$;

$\left(e^{-x^2+3x}\right)' = e^{-x^2+3x}(-2x+3)$;

$\left[(x^{-2}+x^3)^{-2}\right]' = -2(x^{-2}+x^3)^{-3}(-2x^{-3}+3x^2)$;

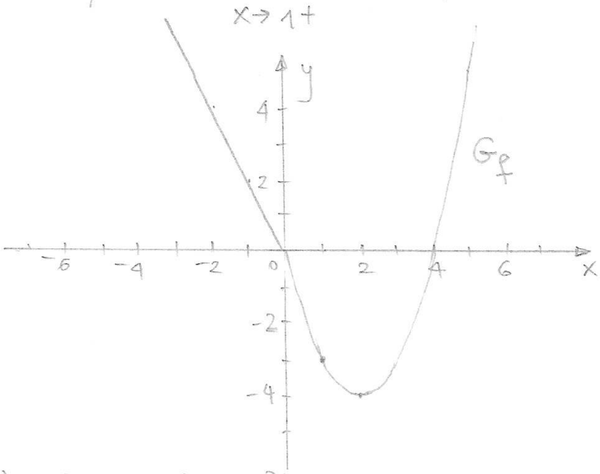
$\left[x\log(1-x^2)\right]' = \log(1-x^2) + x\left(\frac{-2x}{1-x^2}\right)$. $\blacksquare$

4) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} -2x & \text{se } x<0 \\ -x^2-2x & \text{se } 0 \le x < 1 \\ x^2-4x & \text{se } x \ge 1. \end{cases}$$

i) $\lim_{x\to 0^-}(-2x)=0 \qquad \lim_{x\to 0^+}(-x^2-2x)=0 \qquad$ e $\quad f(0)=0$;

$\lim_{x\to 1^-}(-x^2-2x)=-3 \qquad \lim_{x\to 1^+}(x^2-4x)=-3 \qquad$ e $\quad f(1)=-3$.



$\square$

ii) $\lim_{h\to 0^-}\frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-}\frac{-2h-0}{h} = \underline{\underline{-2}}$,

$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+}\frac{-h^2-2h-0}{h} = \lim_{h\to 0^+}(-h-2) = \underline{\underline{-2}}$.

Poiché $\lim_{h\to 0^-}\frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+}\frac{f(h)-f(0)}{h}$ ed è finito, possiamo concludere che f è derivabile in $x=0$. $\square$

iii) $\lim_{h\to 0^-} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{-(1+h)^2-2(1+h)-(1-4)}{h} =$

$= \lim_{h\to 0^-} \frac{-\cancel{1}-2h-h^2-\cancel{2}-2h+\cancel{3}}{h} = \lim_{h\to 0^-}(-h-4) = \underline{\underline{-4}}$

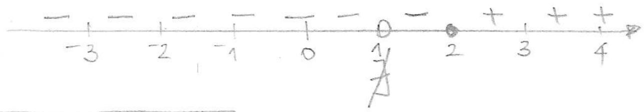
$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{(1+h)^2-4(1+h)-(1-4)}{h} =$

$= \lim_{h\to 0^+} \frac{\cancel{1}+2h+h^2-\cancel{4}-4h+\cancel{3}}{h} = \lim_{h\to 0^+}(h-2) = \underline{\underline{-2}}.$

Poiché $\lim_{h\to 0^-} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} \neq \lim_{h\to 0^+} \frac{f(1+h)-f(1)}{h}$, possiamo concludere che f non è derivabile in $x=1$. □

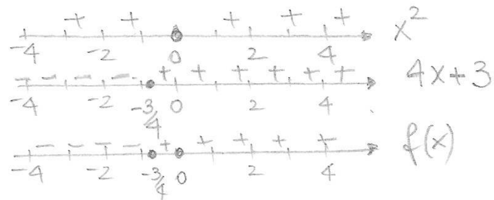
iv)

$$f'(x)=\begin{cases} -2 & \text{se } x\le 0 \\ -2x-2 & \text{se } 0<x<1 \\ 2x-4 & \text{se } x>1 \end{cases} \qquad f'(x) \nexists \text{ per } x=1$$



5) • $\boxed{f(x)=4x^3+3x^2}$ i) $\text{dom} f = \mathbb{R}$

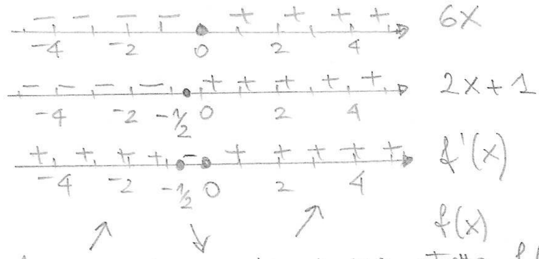
ii) $f(x)=x^2(4x+3)$



iii) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$;

iv) f è continua essendo prodotto e somma di funzioni continue su $\mathbb{R}$;

v) $\text{dom} f' = \mathbb{R}$ $\quad f'(x) = 12x^2+6x = 6x(2x+1)$

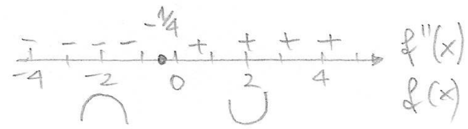


$x=-\frac{1}{2}$, $x=0$ sono pt. critici per f

$x=-\frac{1}{2}$ pt. di max loc. stretto

$f(-\frac{1}{2}) = -\frac{4}{8}+3\cdot\frac{1}{4} = \frac{\cancel{2}}{\cancel{8}_4} = \underline{\underline{\frac{1}{4}}}$; $x=0$ pt. di min. loc. stretto $f(0)=\underline{\underline{0}}$;

vi) $\text{dom} f'' = \mathbb{R}$ $\quad f''(x) = 24x+6$



vii)

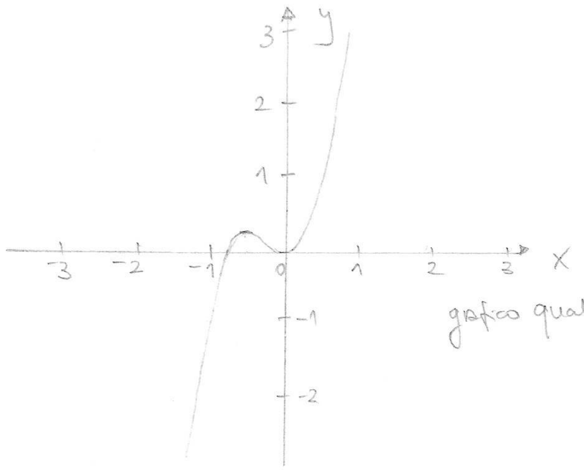
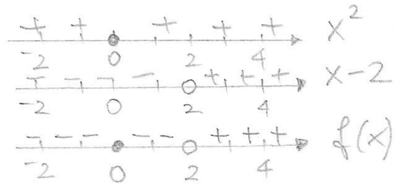


grafico qualitativo di f

□

• $\boxed{f(x) = \dfrac{x^2}{x-2}}$ i) $\mathrm{dom}\, f = \mathbb{R}\setminus\{2\} =]-\infty, 2[\cup]2, +\infty[$

ii)



iii) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

$\lim_{x\to 2^-} f(x) = -\infty$ $x=2$ asint. verticale per f

$\lim_{x\to 2^+} f(x) = +\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$;

Si osservi subito che f ha un asintoto obliquo: infatti $\lim_{\substack{x\to-\infty \\ (+\infty)}} \dfrac{f(x)}{x} = 1 = a$

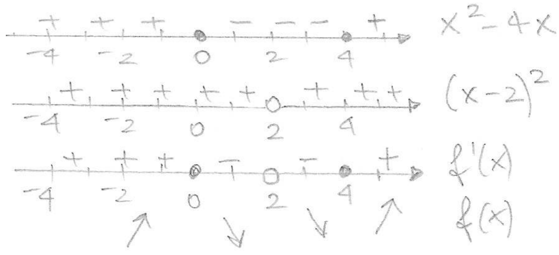
$$\lim_{\substack{x\to-\infty \\ (+\infty)}} [f(x) - ax] = \lim_{\substack{x\to-\infty \\ (+\infty)}} \left[\frac{x^2}{x-2} - x\right] =$$

$$\lim_{\substack{x\to-\infty \\ (+\infty)}} \left[\frac{\cancel{x^2} - \cancel{x^2} + 2x}{x-2}\right] = 2 = b$$ quindi $\underline{\underline{y = x+2}}$ è asintoto obliquo per f per $x \to -\infty$ $(+\infty)$

iv) f è continua su $\mathbb{R}\setminus\{2\}$, poiché rapporto di due funzioni continue;

v) $\mathrm{dom}\, f' = \mathbb{R}\setminus\{2\}$ $f'(x) = \dfrac{2x(x-2) - x^2}{(x-2)^2} = \dfrac{x^2 - 4x}{(x-2)^2}$

$x=0$, $x=4$ pt. critici per f



$x=0$ pt. di max loc. stretto

$f(0) = \underline{\underline{0}}$

$x=4$ pt. di min. loc. stretto $f(4) = \dfrac{16}{2} = \underline{\underline{8}}$;

vi) dom $f'' = \mathbb{R}\setminus\{2\}$ $\quad f''(x) = \dfrac{(2x-4)(x-2)^{\cancel{2}} - (x^2-4x)\cdot 2\cancel{(x-2)}}{(x-2)^{\cancel{4}3}}$

$$= \frac{\cancel{2x^2} - \cancel{8x} + 8 - \cancel{2x^2} + \cancel{8x}}{(x-2)^3} = \frac{8}{(x-2)^3}$$

$- \; - \; - \; - \; - \; - \; 0 \; + \; + \; \to \; f''(x)$

$-4 \quad -2 \quad 0 \quad 2 \quad 4$

$\cap \qquad \cup \qquad f(x)$

vii)

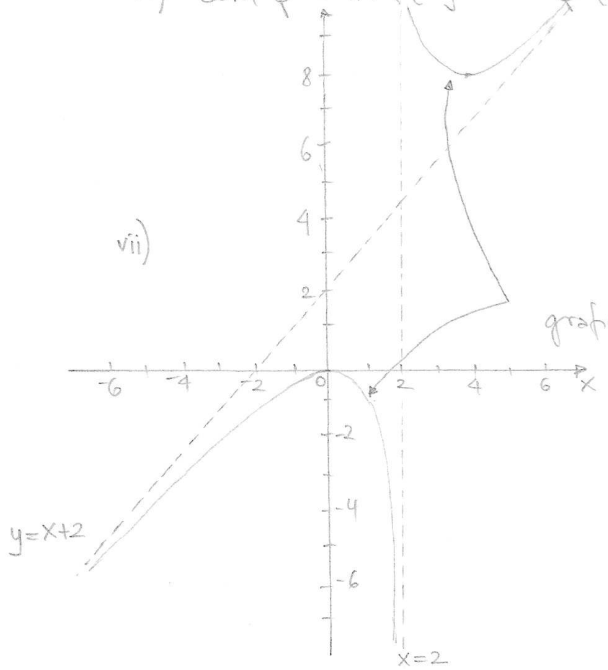


grafico qualitativo di f

□

- $\boxed{f(x) = \dfrac{x-1}{x^2+2}}$

i) dom $f = \mathbb{R}$

ii) $- \; - \; - \; - \; - \; - \; \bullet \; + \; + \; + \; \to \; f$

$-4 \quad -2 \quad 0 \quad 2 \quad 4$

poiché $x^2+2 > 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$

iii) $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0 \end{array}\right\}$ $y=0$ asintoto orizzontale per f per $x \to -\infty$ $(+\infty)$

iv) f è continua in $\mathbb{R}$, poiché rapporto di due funzioni continue e il denominatore non si annulla mai;

v) dom $f' = \mathbb{R}$ $\qquad f'(x) = \dfrac{(x^2+2)-(x-1)\cdot 2x}{(x^2+2)^2} = \dfrac{x^2+2-2x^2+2x}{(x^2+2)^2}$

$$= \frac{-x^2+2x+2}{(x^2+2)^2}$$

$x = 1 \pm \sqrt{3}$ sono p.ti critici per f

$- \; - \; - \; \underset{1-\sqrt{3}}{\bullet} \; + \; + \; + \; + \; \underset{1+\sqrt{3}}{\bullet} \; - \; \to \; f'(x)$

$-3 \quad -2 \quad -1 \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3$

$\searrow \qquad \nearrow \qquad \searrow \qquad f(x)$

$$f(1-\sqrt{3}) = \frac{-\sqrt{3}}{(1-\sqrt{3})^2+2} = \frac{-\sqrt{3}}{6-2\sqrt{3}} = \frac{-\cancel{\sqrt{3}}}{2\sqrt{3}\cdot\cancel{\sqrt{3}} - 2\cancel{\sqrt{3}}} = \frac{-1}{2(\sqrt{3}-1)} \sim -0.7$$

$$f(1+\sqrt{3}) = \frac{\sqrt{3}}{(1+\sqrt{3})^2+2} = \frac{\sqrt{3}}{6+2\sqrt{3}} = \frac{\cancel{\sqrt{3}}}{2\sqrt{3}\cancel{\sqrt{3}} + 2\cancel{\sqrt{3}}} = \frac{1}{2(\sqrt{3}+1)} \sim 0.2$$

vii)

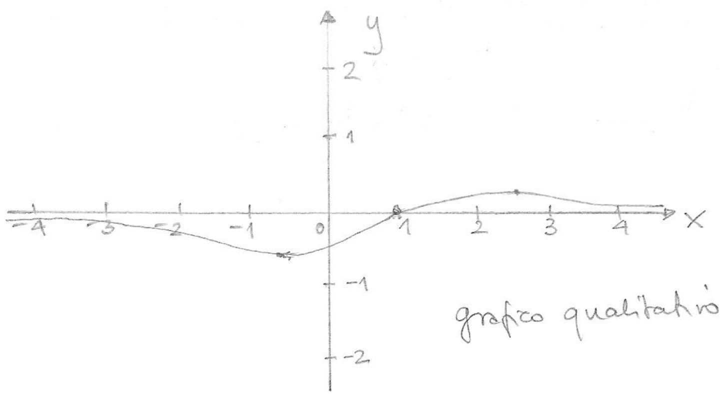
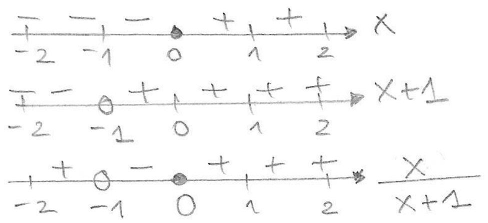
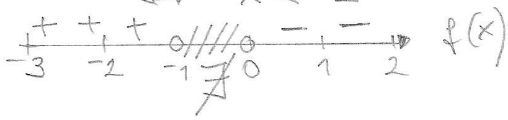


grafico qualitativo di f $\square$

• $\boxed{f(x)=\log\left(\frac{x}{x+1}\right)}$ i) $\operatorname{dom} f=\left\{x\in\mathbb{R}:\ \frac{x}{x+1}>0\right\}=\left]-\infty,-1\right[\ \cup\ \left]0,+\infty\right[$



ii) segno di f : $\frac{x}{x+1}\geq 1 \iff \frac{\cancel{x}-\cancel{x}-1}{x+1}\geq 0 \iff x+1<0$
$\iff x<-1$



iii) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\log 1=\underline{\underline{0}}$

$y=0$ asintoto orizzontale per f, per $x\to-\infty$;

$\lim\limits_{x\to-1^-} f(x)=+\infty$ $x=-1$ asintoto verticale per f ;

$\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=-\infty$ $x=0$ asintoto verticale per f ;

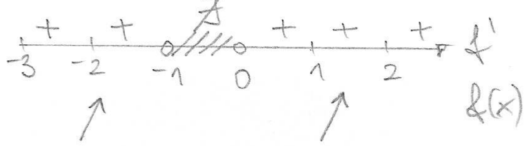
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\log 1=0$

$y=0$ asintoto orizzontale per f , per $x\to+\infty$;

iv) f è continua nel suo dominio essendo rapporto e composizione di funzioni continue;

v) $\operatorname{dom} f'=\operatorname{dom} f$ $f'(x)=\frac{\cancel{x+1}}{x}\cdot\frac{\cancel{x+1-x}}{(x+1)^{\cancel{2}}}=\frac{1}{x(x+1)}$

$\nexists$ sono pti critici per f



vi) $\mathrm{dom}\, f'' = \mathrm{dom}\, f$ $\qquad f''(x) = \dfrac{-2x-1}{[x(x+1)]^2} = \dfrac{-2\cancel{(x+1)}}{x^2(x+1)^{\cancel{2}}}$

$+$ on $(-2,-1)$, $\nexists$ on $[-1,0]$, $- \; - \; -$ on $(0,2)$: $f''(x)$

$\cup \qquad \cap$: $f(x)$

vii)

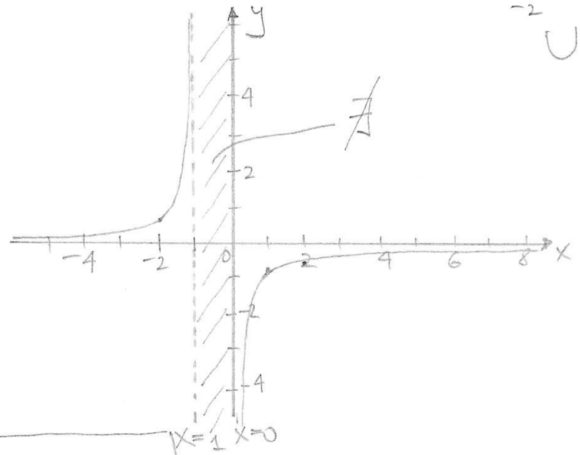


grafico qualitativo di f

□

• $\boxed{f(x) = (x+2)\,e^{-2x}} = \dfrac{(x+2)}{e^{2x}}$

i) $\mathrm{dom}\, f = \mathbb{R}$

ii) segno di f $\qquad -$ for $x<-2$, $+ \; + \; +$ for $x>-2$: f

iii) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \qquad \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0 \qquad y=0$ è asintoto orizzontale per f, per $x\to+\infty$;

iv) f è continua su $\mathbb{R}$, perché composizione e prodotto di funzioni continue;

v) $\mathrm{dom}\, f' = \mathbb{R}$ $\qquad f'(x) = e^{-2x} + (x+2)\,e^{-2x}\cdot(-2) = e^{-2x}\left[1-2x-4\right]$

$= e^{-2x}(-2x-3)$

$x = -\frac{3}{2}$ pt. critico per f $\qquad + \; +$ for $x<-\frac{3}{2}$, $- \; - \; - \; - \; - \; - \; -$ for $x>-\frac{3}{2}$: $f'(x)$

$\nearrow \qquad \searrow$: $f(x)$

$f\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}e^3 \sim 10 \qquad x = -3/2$ pt. di massimo per f

vi) $\mathrm{dom}\, f'' = \mathbb{R}$ $\qquad f''(x) = -2e^{-2x}(-2x-3) + e^{-2x}(-2) = -2e^{-2x}\left[-2x-2\right]$

$= 4e^{-2x}(x+1)$ $\qquad - \; -$ for $x<-1$, $+ \; + \; +$ for $x>-1$: $f''(x)$

$\cap \qquad \cup$: $f(x)$

vii)

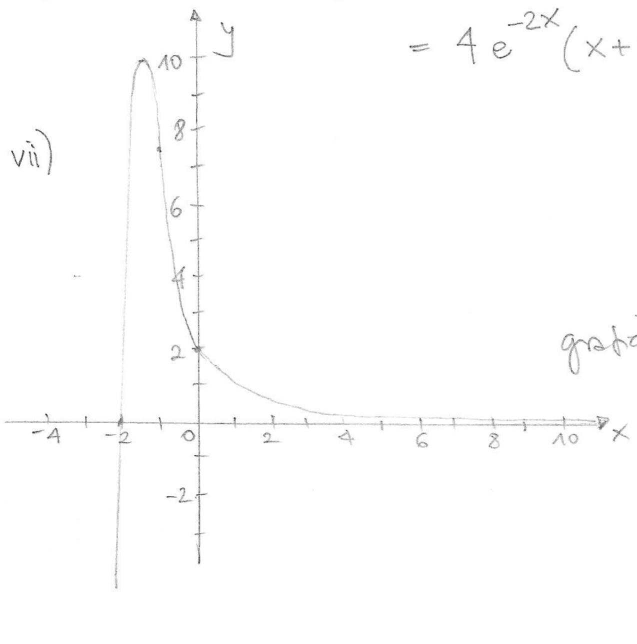


grafico qualitativo di f.