Università degli Studi di Trento – Dip. di Psicologia e Scienze Cognitive
CdL in Scienze e Tecniche di Psicologia Cognitiva
VERIFICA SETTIMANALE DI ANALISI MATEMATICA
a.a. 2014/15 – Rovereto, 27–31 ottobre 2014 (N. 6)

1) i) $A=\{x\in[-3,2] : -1<f(x)\le 0\} = [0,2]\setminus\{1\}$.

A non è un intervallo. □

ii) $\min\limits_{A} f \;\nexists$

$\max\limits_{A} f = 0$ $\quad x\in\{0,2\}$ sono p.ti di massimo. □

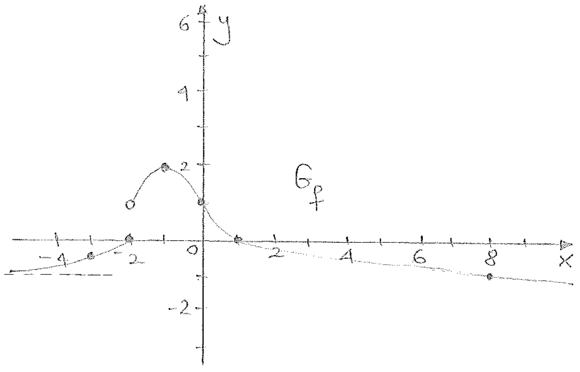
iii) Oss. che $f(1)=-1\in \operatorname{dom} f$ e quindi è ben definito $(f\circ f)(1)=f(f(1))=f(-1)=1$.

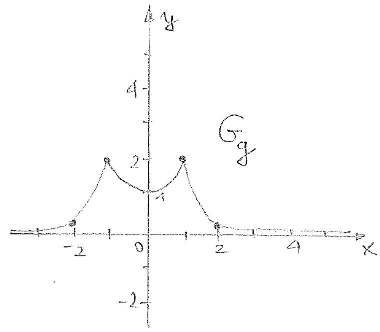
Oss. che $f(-3)=1\in \operatorname{dom} f$ e quindi è ben definito $(f\circ f)(-3)=f(f(-3))=f(1)=-1$. □

iv) $(f\circ f)(x)=0 \iff f(x)\in\{0,2\}$. Ora $f(x)=0 \iff x=0$ o $x=2$, mentre $f(x)=2$ mai. Quindi gli unici $x\in[-3,2]$ t.c. $(f\circ f)(x)=0$ sono $x\in\{0,2\}$. ■

2) i), ii) $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$$f(x)=\begin{cases} -\dfrac{1}{x+1}-1 & \text{se } x\le -2\\ -(x+1)^2+2 & \text{se } -2<x\le 0\\ 1-\sqrt[3]{x} & \text{se } x>0\end{cases} \qquad g(x)=\begin{cases} \dfrac{2}{x^4} & \text{se } x\in\mathbb{R}\setminus]-1,1[\\ x^2+1 & \text{se } x\in[-1,1].\end{cases}$$





iii) f è limitata superiormente, ma non limitata inferiormente; quindi f non è limitata;

g è limitata.

$\min\limits_{[-1,2]} f = f(2) = 1-\sqrt[3]{2}$ $\qquad x=2$ p.to di minimo di f su $[-1,2]$

$\max\limits_{[-1,2]} f = f(-1)=2$ $\qquad x=-1$ p.to di massimo di f su $[-1,2]$;

$\min\limits_{[-1,2]} g = g(2) = \frac{\cancel{2}^1}{\cancel{16}\,8} = \frac{1}{8}$ $\qquad x=2$ pt. di min di g su $[-1,2]$.

$\max\limits_{[-1,2]} g = g(-1) = g(1) = 2$ $\qquad x \in \{-1,1\}$ pt. di max di g su $[-1,2]$. $\square$

iv) $(f+g)(0) \doteq f(0)+g(0) = 1+1 = \underline{2}$;

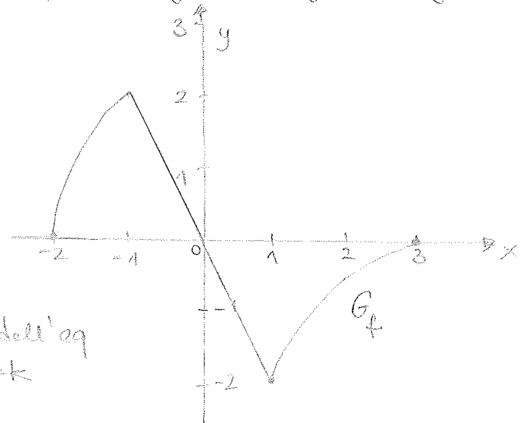
$(fg)(1) \doteq f(1)\,g(1) = 0\cdot 2 = \underline{0}$;

$\left(\frac{f}{g}\right)(1) \doteq \frac{f(1)}{g(1)} = \frac{0}{1} = \underline{0}$ $\qquad \left(\frac{g}{f}\right)(1)\ \nexists$ poiché $f(1)=0$.

$(f\circ g)(1) \doteq f(g(1)) = f(2) = \underline{1-\sqrt[3]{2}}$; $\qquad (g\circ f)(0) \doteq g(f(0)) = g(1) = \underline{2}$. $\blacksquare$

3) i) $f: [-2,3] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 2\sqrt{x+2} & \text{se } -2 \le x < -1 \\ -2x & \text{se } -1 \le x < 1 \\ -\frac{3}{x}+1 & \text{se } 1 \le x \le 3. \end{cases}$$



ii) se $k<-2$ o $k>2$ $\nexists$ sono soluz. dell'eq $f(x)=k$

se $k=-2$ $\exists$ una soluzione dell'eq. $f(x)=k$,

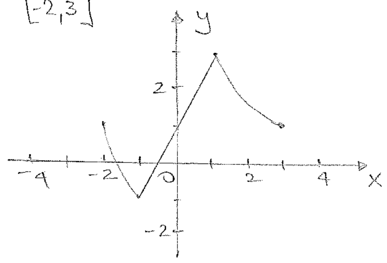
se $-2<k<0$ $\exists$ sono 2 soluzioni "

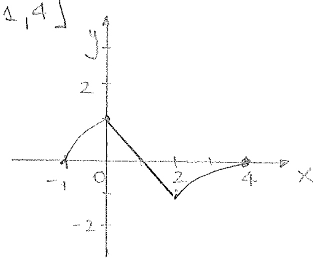
se $k=0$ $\exists$ sono 3 soluzioni "

se $0<k<2$ $\exists$ sono 2 soluzioni "

se $k=2$ $\exists$ una soluzione dell'eq. $f(x)=k$. $\square$

iii) $\underset{[-2,3]}{\overset{?}{}} x \longmapsto -f(x)+1$ $\qquad \underset{[-1,4]}{\overset{?}{}} x \longmapsto \frac{1}{2}f(x-1)$





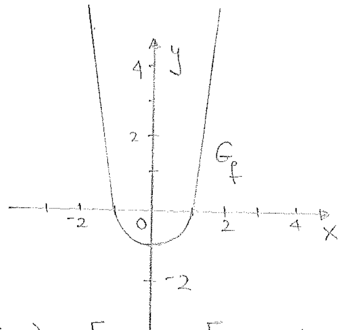
$\square$

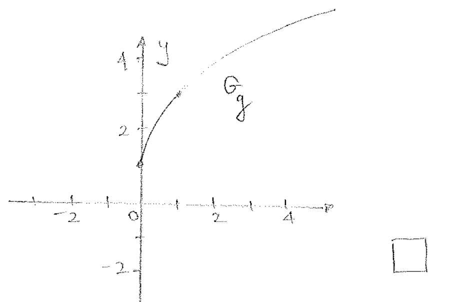
iv) $A = \{x \in [-2,3] : f(x) \ge 0\} = [-2,0] \cup \{3\}$.

$\min A = \underline{-2}$, $\qquad \max A = \underline{3}$ $\blacksquare$

4) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $\quad f(x)=x^4-1$ $\qquad g(x)=[0,+\infty[\to\mathbb{R}$, $\quad g(x)=2\sqrt{x}+1$

i)





ii) $f(\mathbb{R})=[-1,+\infty[$ quindi $g\circ f\ \nexists\ \forall x\in\mathbb{R}$; dobbiamo considerare la restrizione di f all'insieme $E=\{x\in\mathbb{R}:\ f(x)\geq 0\}=]-\infty,-1]\cup[1,+\infty[$.

Abbiamo

$$(g\circ f)(x)\underset{x\in E}{\overset{\circ}{=}} g(f(x))=g(x^4-1)=\underline{2\sqrt{x^4-1}+1}.$$

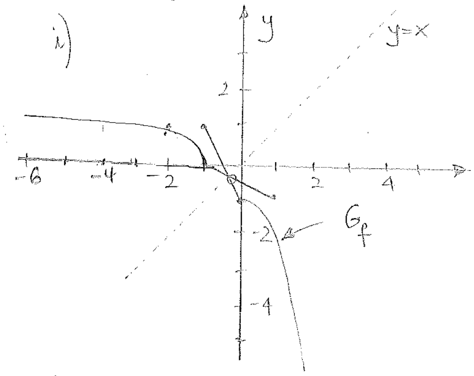
Abbiamo invece che $g([0,+\infty[)=[1,+\infty[\ \subset \operatorname{dom} f=\mathbb{R}$, e quindi in questo caso $(f\circ g)(x)$ esiste per ogni $x\in\operatorname{dom} g$. Abbiamo allora

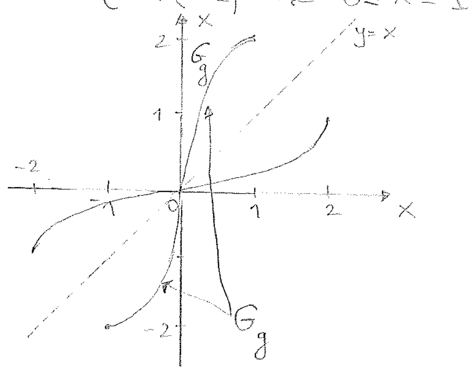
$$(f\circ g)(x)\underset{x\in[0,+\infty[}{\overset{\circ}{=}} f(g(x))=f(2\sqrt{x}+1)=\underline{(2\sqrt{x}+1)^4-1}.$$

5) $f:[-1,+\infty[\ \to\ ]-\infty,1]$, $\quad g:[-1,1]\to[-2,2]$

$$f(x)=\begin{cases}-2x-1 & \text{se } -1\le x\le 0\\ -x^3-1 & \text{se } x>0\end{cases}\qquad g(x)=\begin{cases}2\sqrt[3]{x} & \text{se } -1\le x\le 0\\ -2x(x-2) & \text{se } 0\le x\le 1\end{cases}$$

i)





ii) $\min\limits_{[-2,2]} g^{-1}=-1$ $\qquad x=-2$ pt. di minimo di g^{-1} su $[-2,2]$

$\max\limits_{[-2,2]} g^{-1}=1$ $\qquad x=2$ pt. di massimo di g^{-1} su $[-2,2]$.