

Università di Trento - Dip. di Psicologia e Scienze Cognitive
 CdL in Scienze e Tecniche di Psicologia Cognitiva
 ESAME SCRITTO DI ANALISI MATEMATICA
 a.a. 2014-2015 - Rovereto, 30 gennaio 2015

FILA (A)

1) i) $A = "\forall x \in \mathbb{Q}, \exists n \in \mathbb{N} : nx \in \mathbb{Z}"$.

$\text{non } A = "\exists x \in \mathbb{Q} : \forall n \in \mathbb{N}, nx \notin \mathbb{Z}"$.

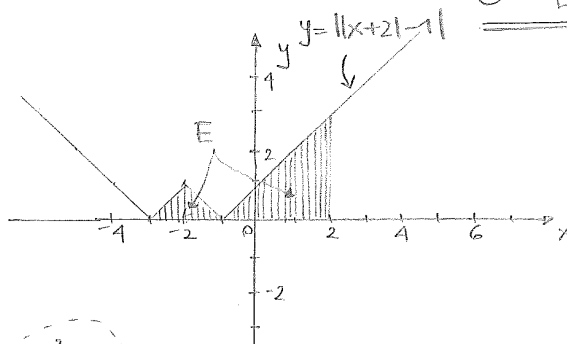
La proposizione A è vera; infatti, preso $x \in \mathbb{Q}$ qualsiasi, si ha che $x = \frac{m}{n}$ con $m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}, n \neq 0$. Quindi $nx = m \in \mathbb{Z}$ e si ha concluso. La proposizione $\text{non } A$ è di conseguenza falsa. $\square$

ii) $\frac{2^{x^2-1} \cdot 4^x}{2^{-x+3}} \leq 1 \iff 2^{x^2-1} \cdot 2^{2x} \cdot 2^{x-3} \leq 2^0$
 $\iff 2^{x^2+3x-4} \leq 2^0 \iff 2^{x^2+3x-4} \leq 2^0 \iff x^2+3x-4 \leq 0$
 $S = [-4, 1].$ $\blacksquare$

2) i) $\int_{-3}^2 |x+2| - 1 \, dx$

$= \text{area}(E)$

$= 1 + \frac{9}{2} = \frac{11}{2}$



$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{x^2} - 1}{3x^4} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{x^2} - 1}{x^2} \cdot \frac{1}{3x^2} = +\infty$. $\square$

ii) $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = e^x + x, g(x) = x^2 + 1$. Si ha $f'(x) = e^x + 1, g'(x) = 2x$

$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) g'(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

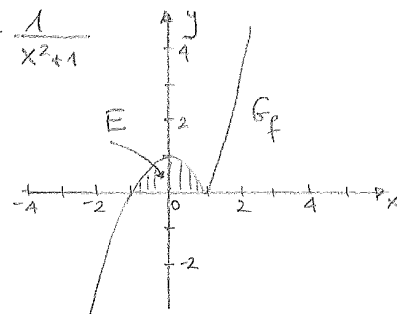
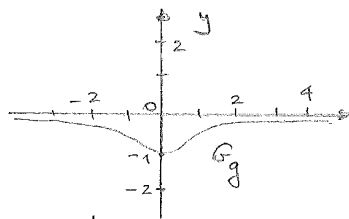
e mi ha $(f \circ g)'(2) = f'(g(2)) g'(2) = f'(5) g'(2) = (e^5 + 1) 4 = 4e^5 + 4$

iii) a) $\sum_{n=1}^4 \text{area}(C_n) = \sum_{n=1}^4 \pi \left(\frac{1}{n^2} \right) = \pi \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} \right)$
 $= \pi \left(\frac{36 + 9 + 4}{36} + \frac{1}{16} \right) = \pi \left(\frac{49}{36} + \frac{1}{16} \right) = \pi \cdot \frac{205}{144}$ $\square$

b) $\sum_{j=1}^8 (-1)^j f(j) = -f(1) + f(2) - f(3) + f(4) - f(5) + f(6) - f(7) + f(8)$
 $= -3 + 6 = 3$. $\blacksquare$

3) $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = (x+1)|x-1|$ $g(x) = -\frac{1}{x^2+1}$

i) $f(x) = \begin{cases} (x+1)(x-1) = x^2-1 & \text{se } x \geq 1 \\ (x+1)(-x+1) = 1-x^2 & \text{se } x < 1 \end{cases}$



□

ii) $\text{area}(E) = \int_{-1}^1 (1-x^2) dx = \left[x - \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^1 = \left(1 - \frac{1}{3} \right) - \left(-1 + \frac{1}{3} \right) = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}.$

□

iii) $g(\mathbb{R}) = \underline{\underline{[-1, 0[}}$. $(fg)(0) = f(0)g(0) = 1(-1) = \underline{\underline{-1}}.$

$(f \circ g)(1) = f(g(1)) = f\left(-\frac{1}{2}\right) = 1 - \frac{1}{4} = \underline{\underline{\frac{3}{4}}}.$

□

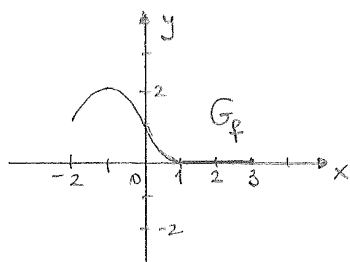
iv) $\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{[1 - (1+h)^2] - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{1 - 1 - 2h - h^2}{h} = \underline{\underline{-2}}.$

$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{[(1+h)^2 - 1] - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1 + 2h + h^2 - 1}{h} = \underline{\underline{2}}.$

f non è derivabile in $x_0 = 1$. Il pt. $x_0 = 1$ risulta essere un pt. angoloso

■

4) $f: [-2, 3] \rightarrow \mathbb{R}$

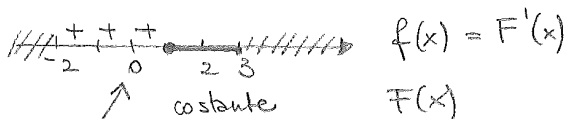


i) $F(x) = \int_{-2}^x f(t) dt$ è crescente su $[-2, 3]$;

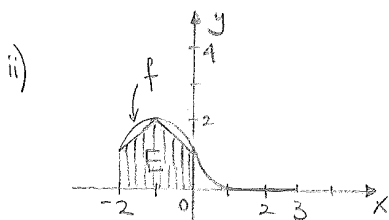
questo fatto segue subito dall'interpret. geometrica dell'integrale.

Possiamo asserire che F è strutt. crescente

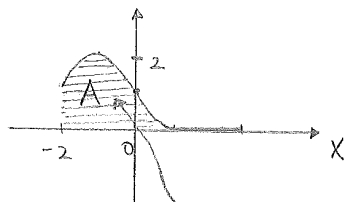
su $[-2, 1]$ e poi costante su $[1, 3]$. Questo fatto si può dedurre anche facilmente usando il teorema fond. del calcolo integrale (che assicura che $F'(x) = f(x) \forall x \in [-2, 3]$) e dal segno di f su $[-2, 3]$



□



$$\max_{x \in [-2, 3]} F(x) > \text{area}(E) = 3.$$



$$\max_{x \in [-2, 3]} F(x) = \text{area}(A) < 4.$$

□

iii) f è derivabile e il segno di $f'(x) = \text{segno di } F''(x)$ (segue dal teorema fond. del calcolo integrale)

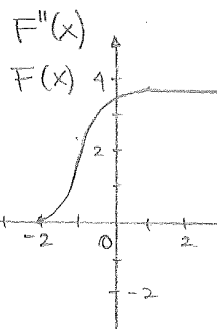


Grafico qualitativo di $F(x)$

5) $f(x) = \frac{\log(2x)}{|x|}$

• $\text{dom } f =]0, +\infty[$ e quindi

$$f(x) = \frac{\log(2x)}{x}$$

• segno di f $\log(2x) = 0 \iff 2x = 1 \iff x = \frac{1}{2}$

• $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$ $x=0$ asintoto verticale (destro) per f

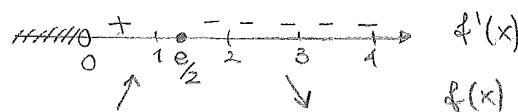
$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ $y=0$ asintoto orizzontale per f , per $x \rightarrow +\infty$.

• continuità di f su $]0, +\infty[$.

• $\text{dom } f' =]0, +\infty[$ $f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \log(2x)}{x^2} = \frac{1 - \log(2x)}{x^2}$

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\iff \log(2x) = 1 \\ &\iff 2x = e \\ &\iff x = \frac{e}{2} \end{aligned}$$

pt. critico per f



$x = \frac{e}{2}$ pt. di max. loc. stretto per f

$$f\left(\frac{e}{2}\right) = \frac{\log\left(2 \cdot \frac{e}{2}\right)}{\frac{e}{2}} = \frac{2}{e}$$

$$\begin{aligned} \text{dom } f'' &=]0, +\infty[\\ f''(x) &= \frac{-\frac{1}{x} \cdot x \cdot x^2 - (1 - \log(2x)) \cdot 2x}{x^4} = \\ &= \frac{-x - (1 - \log(2x)) \cdot 2x}{x^4} = \frac{-3 + 2\log(2x)}{x^3} \end{aligned}$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \log(2x) = \frac{3}{2} \Leftrightarrow 2x = e^{\frac{3}{2}} \Leftrightarrow x = \frac{e^{\frac{3}{2}}}{2} \sim 2.2 \text{ pt. di flesso}$$

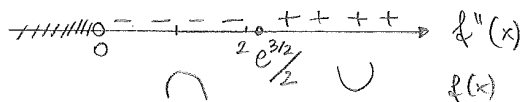
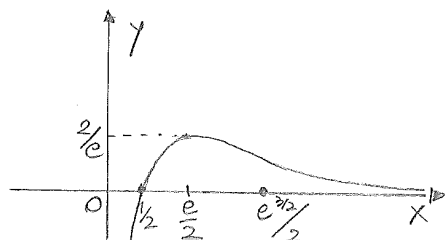


grafico qualitativo di f

$$\text{ii) } y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \text{ con } x_0 = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Poiché } f\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \quad f'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1 - \log 1}{\frac{1}{4}} = 4 \text{ si ha che}$$

$$y = 4\left(x - \frac{1}{2}\right), \text{ ossia}$$

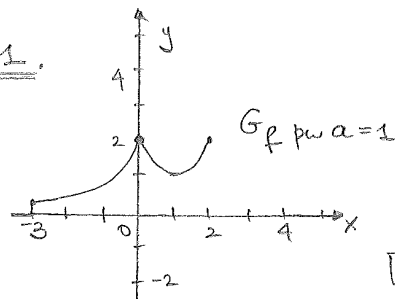
$$\underline{y = 4x - 2} \text{ è l'eq. della retta tg. ricercata.}$$

6) i) Basta imporre la continuità di f in $x = 0$ (poiché per $x > 0$ e $x < 0$ la funzione è definita da funzioni continue). Ora, basta imporre

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} 2e^x = 2 = f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 - 2x + 1 + a) = 1 + a.$$

Quindi deve essere $2 = 1 + a$, ossia $a = 1$.

$$f(x) = \begin{cases} 2e^x & \text{se } -3 \leq x < 0 \\ (x-1)^2 + 1 & \text{se } 0 \leq x \leq 2 \end{cases}$$



$$\text{ii) } \max_{[-3, 2]} f = \underline{2}$$

$$\underline{x = 0, x = 2 \text{ pt. di massimo;}}$$

$$\min_{[-3, 2]} f = \underline{\frac{2}{e^3}}$$

$$\underline{x = -3 \text{ pt. di minimo.}}$$

FILA (B)

1) i) $A = "\forall x \in \mathbb{Q}, \exists m \in \mathbb{Z} : mx \in \mathbb{N}"$.

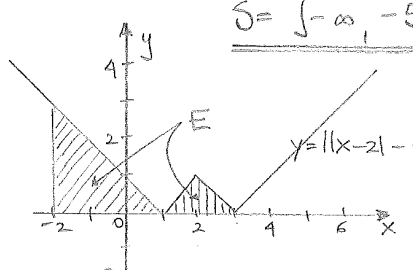
$\text{non } A = "\exists x \in \mathbb{Q} : \forall m \in \mathbb{Z}, mx \notin \mathbb{N}"$.

La proposizione A è vera; infatti, preso $x \in \mathbb{Q}$ qualsiasi, si ha che $x = \frac{m}{n}$ con $m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0$. Quindi $nx = m \in \mathbb{N}$ e mi ha concluso.

La proposizione $\text{non } A$ è di conseguenza falsa. $\square$

ii) $\frac{3^{x^2-1} \cdot 9^x}{3^{-2x+4}} \geq 1 \iff 3^{x^2-1} \cdot 3^{2x} \cdot 3^{2x-4} \geq 3^0$
 $\iff 3^{x^2+4x-5} \geq 3^0 \iff x^2+4x-5 \geq 0$
 $\iff 3^{x^2+4x-5} \geq 3^0$

2) i) $\int_{-2}^3 ||x-2|-1| dx$
 $= \text{area}(E)$
 $= \frac{9}{2} + 1 = \frac{11}{2}$



$S =]-\infty, -5] \cup [1, +\infty[$

$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\log(1+x^2)}{2x^4} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{(\log(1+x^2))'}{2x^4} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\frac{1}{1+x^2} \cdot 2x}{2x^4} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^3} = +\infty$

ii) $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2+1, g(x) = e^x+x$. Si ha $f'(x) = 2x, g'(x) = e^x+1$

$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) g'(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$ e mi ha

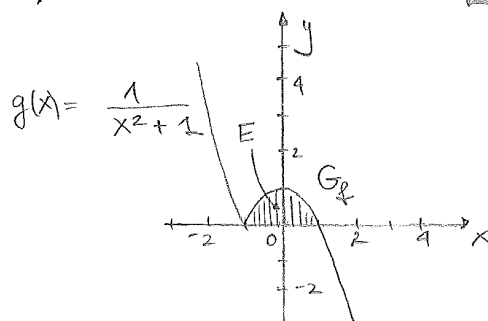
$(f \circ g)'(2) = f'(g(2)) g'(2) = f'(e^2+2)(e^2+1) = 2(e^2+2)(e^2+1)$. $\square$

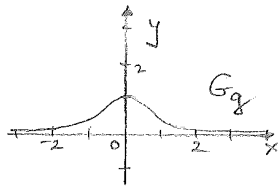
iii) a) $\sum_{m=1}^4 \text{area}(C_m) = \sum_{m=1}^4 \pi \left(\frac{1}{m^2} \right) = \pi \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} \right) = \pi \cdot \frac{205}{144}$

b) $\sum_{n=1}^8 (-1)^n f(n) = -f(1) + f(2) - f(3) + f(4) - f(5) + f(6) - f(7) + f(8)$
 $= -(-2) + (-4) = -2$. $\square$

3) $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = (1-x)|x+1|$

i) $f(x) = \begin{cases} (1-x)(x+1) = 1-x^2 & \text{se } x \geq -1 \\ (1-x)(-x-1) = x^2-1 & \text{se } x < -1 \end{cases}$





□

$$ii) \text{ area}(E) = \int_{-1}^1 (1-x^2) dx = \left[x - \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^1 = \frac{4}{3}$$

□

$$iii) g(\mathbb{R}) = \underline{[0, 1]}$$

$$(fg)(0) = f(0)g(0) = 1 \cdot 1 = \underline{1}.$$

$$(f \circ g)(1) = f(g(1)) = f\left(\frac{1}{2}\right) = 1 - \frac{1}{4} = \underline{\frac{3}{4}}.$$

□

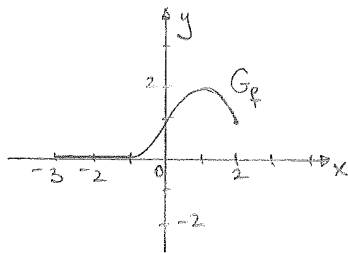
$$iv) \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{[-1+h]^2 - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{1 - 2h + h^2 - 1}{h} = \underline{-2}.$$

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1 - (-1+h)^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1 - 1 + 2h - h^2}{h} = \underline{2}.$$

f non è derivabile in $x_0 = -1$. Il pt. $x_0 = -1$ risulta essere un pt. angoloso.

■

$$4) f: [-3, 2] \rightarrow \mathbb{R}$$



$$i) F(x) = \int_{-3}^x f(t) dt \text{ è crescente su } [-3, 2];$$

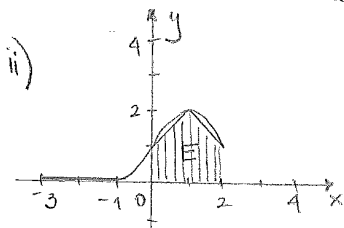
questo fatto segue subito dall'interpretazione geometrica dell'integrale.

Possiamo afferire che F è costante uguale

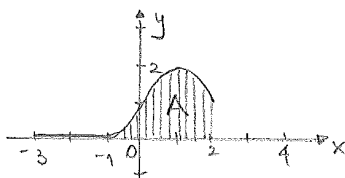
a 0 su $[-3, -1]$ e poi strett. crescente su $[-1, 2]$. Questo fatto si può dedurre anche facilmente usando il teorema fond. del calcolo integrale (che assicura che $F'(x) = f(x) \forall x \in [-3, 2]$) e dal segno di f su $[-3, 2]$

$$\begin{array}{c} \text{costante} \uparrow \\ f(x) = F'(x) \\ F(x) \end{array}$$

□



$$\max_{x \in [-3, 2]} F(x) > \text{area}(E) = 3.$$



$$\max_{x \in [-3, 2]} F(x) = \text{area}(A) < 4.$$

□

iii) f è derivabile e il segno di $f'(x)$ = segno di $F''(x)$ (segue dal teorema fondamentale del calcolo integrale)

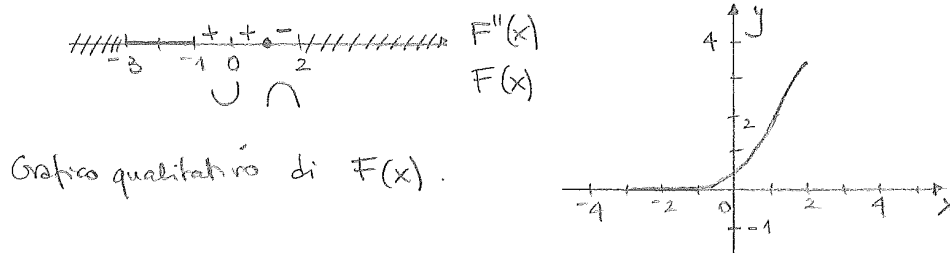


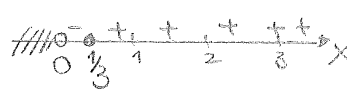
Grafico qualitativo di $F(x)$.

5) $f(x) = \frac{\log(3x)}{x}$

• $\text{dom } f =]0, +\infty[$ e quindi

$f(x) = \frac{\log(3x)}{x}$

• segno di f



$\log(3x) = 0 \Leftrightarrow$

$3x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$

• $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$

$x = 0$ asintoto verticale (destro) per f

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

$y = 0$ asintoto orizzontale per f , per $x \rightarrow +\infty$.

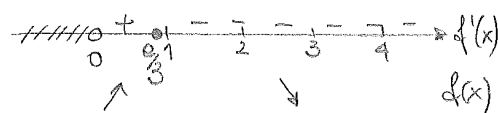
• continuità di f su $]0, +\infty[$.

• $\text{dom } f' =]0, +\infty[$ $f'(x) = \frac{\frac{1}{3x} \cdot 3 - \log(3x)}{x^2} = \frac{1 - \log(3x)}{x^2}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \log(3x) = 1$

$\Leftrightarrow 3x = e$

$x = \frac{e}{3}$ pt. critico per f



$x = \frac{e}{3}$ pt. di max. loc. stretto per f $f\left(\frac{e}{3}\right) = \frac{\log\left(3 \cdot \frac{e}{3}\right)}{\frac{e}{3}} = \frac{3}{e}$

• $\text{dom } f'' =]0, +\infty[$ $f''(x) = \frac{-\frac{1}{3x^2} \cdot 3 - (1 - \log(3x))2x}{x^4} =$

$= \frac{-\frac{1}{x^2} - (1 - \log(3x))2x}{x^4} = \frac{-3 + 2\log(3x)}{x^3}$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \log(3x) = \frac{3}{2}$

$\Leftrightarrow 3x = e^{3/2}$

$\Rightarrow x = \frac{e^{3/2}}{3} \sim 1.5$

pt. di flesso

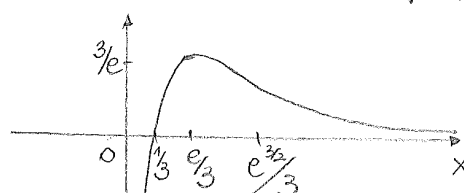
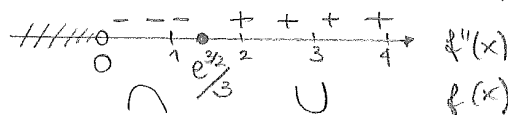


grafico qualitativo di f

ii) $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ con $x_0 = \frac{1}{3}$

Poiché $f(\frac{1}{3}) = 0$ $f'(\frac{1}{3}) = \frac{1 - \log 1}{\frac{1}{9}} = 9$ si ha che

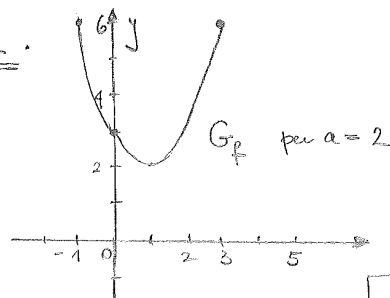
$y = 9(x - \frac{1}{3})$, ossia $y = 9x - 3$ è l'eq. della retta tg. cercata ■

6) i) Basta imporre la continuità di f in $x=0$ (poiché per $x > 0$ e $x < 0$ la funzione è definita da funzioni continue). Ora, basta imporre

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} 3\left(\frac{1}{2}\right)^x = 3 = f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 - 2x + 1 + a) = 1 + a,$$

quindi deve essere $3 = 1 + a$, ossia $a = 2$.

$$f(x) = \begin{cases} 3\left(\frac{1}{2}\right)^x & \text{se } -1 \leq x < 0 \\ (x-1)^2 + 2 & \text{se } 0 \leq x \leq 3 \end{cases}$$



ii) $\max_{[-1, 3]} f = \underline{\underline{6}}$ $x = -1, x = 3$ pt. di massimo;

$\min_{[-1, 3]} f = \underline{\underline{2}}$ $x = 1$ pt. di minimo. ■