Università di Trento – Dip. di Psicologia e Scienze Cognitive
CdL in Scienze e Tecniche di Psicologia Cognitiva
ESAME SCRITTO DI ANALISI MATEMATICA
a.a. 2014 – 2015 – Rovereto, 9 giugno 2015

FILA (A)

1) i) $\mathcal{A}$ = " $\forall a \in \mathbb{R},\ \exists x \in \mathbb{R} : x^2 - 2x = a$ ".

non $\mathcal{A}$ = " $\exists a \in \mathbb{R} : \forall x \in \mathbb{R},\ x^2 - 2x \neq a$ ".

Notiamo che $x^2-2x=a \iff x^2-2x-a=0 \iff x_{1/2} = \frac{2 \pm \sqrt{4+4a}}{2} = 1 \pm \sqrt{1+a}$.

Risulta allora che $x^2-2x=a$ ammette (almeno) una soluzione se e solo se $1+a \geq 0$, ossia $a \geq -1$. Possiamo allora asserire che la proposizione $\mathcal{A}$ è falsa, e quindi non $\mathcal{A}$ è vera. $\square$

ii) $\log_2(|x-2|-x^2) \leq 2 \iff \log_2(|x-2|-x^2) \leq \log_2 4$

$$\iff \begin{cases} |x-2|-x^2 > 0 \\ |x-2|-x^2 \leq 4 \end{cases}$$

(altrimenti non è definito il membro sinistro della disequazione)

$\log_2 x \nearrow$

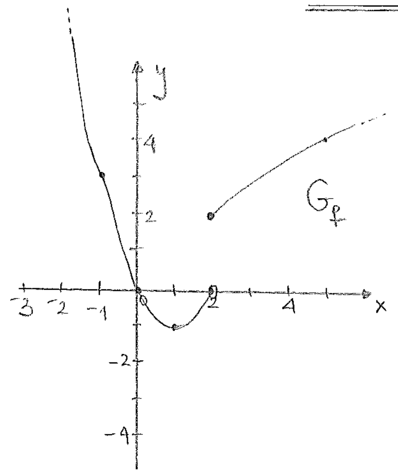
$$\iff \begin{cases} x-2 \geq 0 \\ x-2-x^2 > 0 \\ x-2-x^2 \leq 4 \end{cases} \quad \text{o} \quad \begin{cases} x-2 < 0 \\ -x+2-x^2 > 0 \\ -x+2-x^2 \leq 4 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x \geq 2 \\ x^2-x+2 < 0 \\ x^2-x+6 \geq 0 \end{cases} \quad \text{o} \quad \begin{cases} x < 2 \\ x^2+x-2 < 0 \\ x^2+x+2 \geq 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x \geq 2 \\ \emptyset \\ \mathbb{R} \end{cases} \quad \text{o} \quad \begin{cases} x < 2 \\ -2 < x < 1 \\ \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow \underline{S =]-2, 1[}.$$

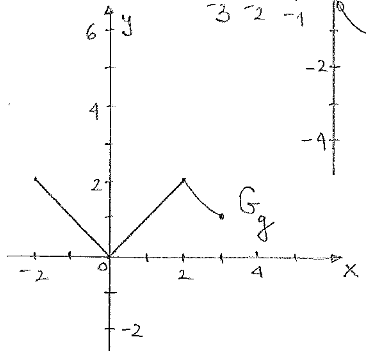
2) i) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \left(\frac{1}{3}\right)^x & \text{se } x \leq -1 \\ x^2-2x & \text{se } -1 < x < 2 \\ 2\sqrt{x-1} & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$$



$g : [-2,3] \to \mathbb{R}$,

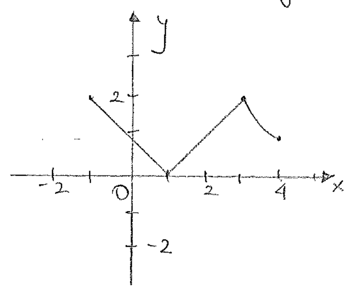
$$g(x) = \begin{cases} |x| & \text{se } -2 \leq x \leq 2 \\ \frac{2}{x-1} & \text{se } 2 < x \leq 3 \end{cases}$$



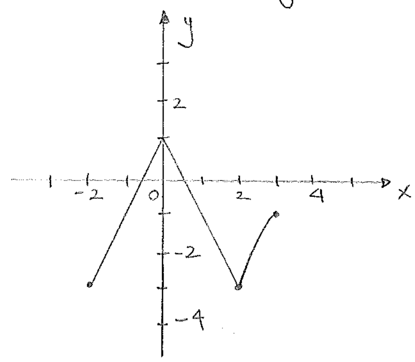
$\square$

ii) $g([-2,3])=\underline{\underline{[0,2]}}$. g non è iniettiva: basta prendere, per esempio, $x_1=-2 \neq x_2=2$ e si ha $g(x_1)=g(x_2)$. $\square$

iii) $[-1,4]\ni x \longmapsto g(x-1)$



$[-2,3]\ni x \longmapsto -2g(x)+1$



$\square$

iv) • in $x=-1$ abbiamo:

$$\left.\begin{aligned}\lim_{x\to -1^-} f(x) &= \lim_{x\to -1^-}\left(\frac{1}{3}\right)^x = 3\\ \lim_{x\to -1^+} f(x) &= \lim_{x\to -1^+}(x^2-2x)=3\end{aligned}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to -1} f(x)=3.$$

Poiché inoltre $f(-1)=3$, possiamo concludere che f è continua in $x=-1$.

• in $x=2$ abbiamo:

$$\left.\begin{aligned}\lim_{x\to 2^-} f(x) &= \lim_{x\to 2^-}(x^2-2x)=0\\ \lim_{x\to 2^+} f(x) &= \lim_{x\to 2^+} 2\sqrt{x-1} = 2\ (=f(2))\end{aligned}\right\} \Rightarrow \nexists \lim_{x\to 2} f(x);$$

possiamo concludere che f non è continua in $x=2$. $\square$

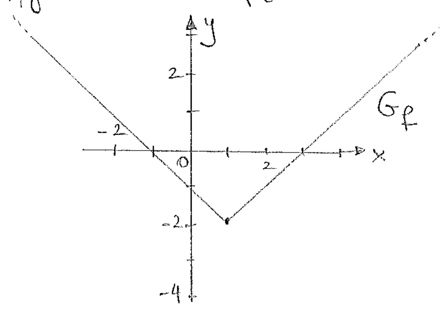
v) Poiché f non è continua in $[-1,5]$ (non essendo continua in $x=2$), f non soddisfa le ipotesi del teorema di Weierstrass.

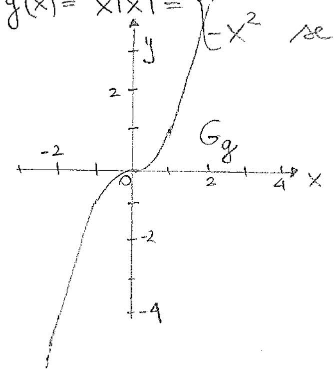
Abbiamo comunque

$\min_{[-1,5]} f = \underline{\underline{-1}}$ $\qquad \underline{x=1}$ pr. di minimo di f su $[-1,5]$ $\qquad \max_{[-1,5]} f = \underline{\underline{4}}$ $\qquad \underline{x=5}$ pr. di massimo di f su $[-1,5]$

(ricordo che il teorema di Weierstrass dà condizioni sufficienti per l'esistenza del minimo e del massimo di f, ma non necessarie). ■

3) i) $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $\qquad f(x)=|x-1|-2$ $\qquad g(x)=x|x|=\begin{cases}x^2 & \text{se } x\geq 0\\ -x^2 & \text{se } x<0\end{cases}$.





$\square$

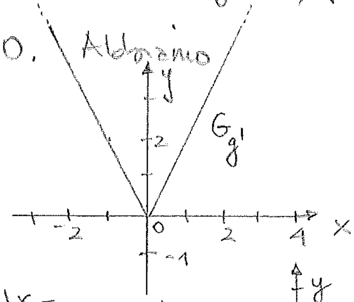
ii) $(f\circ g)(-1) = f(g(-1)) = f(-1) = \underline{\underline{0}}$

$(g\circ f)(1) = g(f(1)) = g(-2) = \underline{\underline{-4}}.$ $\square$

iii) $\lim\limits_{h\to 0^-} \frac{g(h)-g(0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0^-} \frac{-h^2-0}{h} = \underline{\underline{0}}$ $\qquad \lim\limits_{h\to 0^+} \frac{g(h)-g(0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0^+} \frac{h^2-0}{h} = \underline{\underline{0}}.$

Poiché questi due limiti esistono finiti e sono uguali, possiamo dire che g è derivabile in $x_0=0$ e $g'(0)=0$. Abbiamo

$$g'(x) = \begin{cases} 2x & \text{se } x>0 \\ 0 & \text{se } x=0 \\ -2x & \text{se } x<0 \end{cases}$$

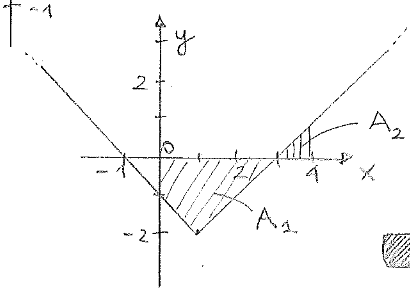


$\square$

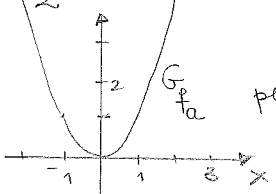
iv) $\sum\limits_{n=1}^{4} \int\limits_{n-1}^{n} f(x)\,dx = \int\limits_0^1 f(x)dx + \int\limits_1^2 f(x)dx + \dots + \int\limits_3^4 f(x)dx =$

$= \int\limits_0^4 f(x)dx = -\text{area}\,A_1 + \text{area}\,A_2$

$= -\frac{7}{2} + \frac{1}{2} = \underline{\underline{-3}}.$



4) i) se $\boxed{a=0}$, $f_a(x) = x^2$

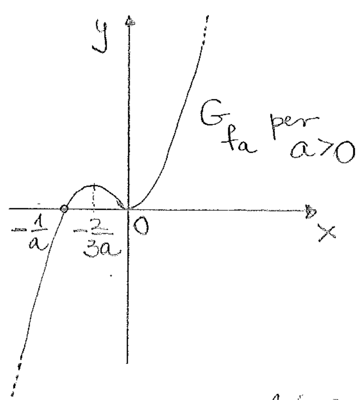


per $a=0$.

Se $\boxed{a>0}$, $f_a(x) = x^2 + ax^3$: • dom $f_a = \mathbb{R}$, • $f_a(x) = x^2(1+ax)$

$- - - \underset{-1/a}{\bullet} + \underset{0}{\bullet} + + + + \to f_a(x)$

• $\lim\limits_{x\to-\infty} f_a(x) = -\infty$ $\qquad \lim\limits_{x\to+\infty} f_a(x) = +\infty$



• $f_a'(x) = 2x + 3ax^2 = x(2+3ax)$

$+ + \underset{-\frac{2}{3a}}{\bullet} - \underset{0}{\bullet} + + + + + \to f_a'(x)$

$\nearrow \quad \searrow \quad \nearrow \quad f_a(x)$

$x = -\frac{2}{3a}$ pt. di max. loc. stretto per f_a

$x = 0$ pt. di min. loc. stretto per f_a

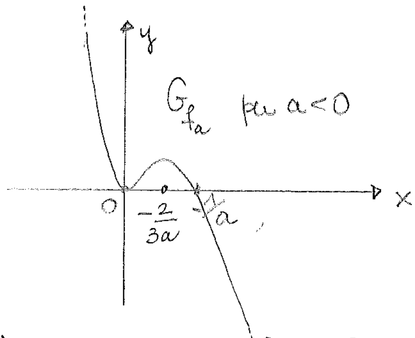
$f_a\left(-\frac{2}{3a}\right) = \frac{4}{9a^2} - \cancel{a}\frac{8}{27a^{\cancel{3}2}} = \frac{4}{27a^2}$ $\qquad f_a(0) = 0$.

Se $\boxed{a<0}$, $f_a(x) = x^2 + ax^3$ • dom $f_a = \mathbb{R}$ • $f_a(x) = x^2(1+ax)$

$+ + \underset{0}{\bullet} + \underset{-\frac{1}{a}}{\bullet} - - - \to f_a(x)$

• $\lim\limits_{x\to-\infty} f_a(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f_a(x) = -\infty$.



• $f_a'(x) = 2x + 3ax^2 = x(2+3ax)$

$- \ - \quad 0 \quad + \quad -\frac{2}{3a} \quad - \ - \ -$ $\quad f_a'(x)$

$\searrow \quad 0 \quad \nearrow \quad -\frac{2}{3a} \quad \searrow$ $\quad f_a(x)$

$x=0$ pt. di min. loc. stretto per f_a $\quad f_a(0)=0$

$x=-\frac{2}{3a}$ pt. di max. loc. stretto per f_a $\quad f_a\left(-\frac{2}{3a}\right) = \frac{4}{27a^2}$.

ii) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+ax^3}{e^{ax}+x^2} = \begin{cases} 1 & \text{se } a=0 \\ 0 & \text{se } a>0 \\ -\infty & \text{se } a<0. \end{cases}$

5) $\boxed{f(x) = \dfrac{2x+1}{x+2}}$

• $\text{dom} f =]-\infty,-2[\cup]-2,+\infty[$

• segno di f

$- \ - \ - \quad -\frac{1}{2} \quad + \ + \ +$ $\quad 2x+1$

$- \quad -2 \quad + \ + \ + \ + \ + \ +$ $\quad x+2$

$+ \quad -2 \quad - \ - \quad -\frac{1}{2} \quad + \ + \ + \ +$ $\quad f(x)$

• $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = 2$ $\quad y=2$ asintoto orizzontale per f, per $x\to+\infty$ (per $x\to-\infty$)

$\displaystyle\lim_{x\to-2^-} f(x) = +\infty$ $\quad x=-2$ asintoto verticale (da sinistra) di f

$\displaystyle\lim_{x\to-2^+} f(x) = -\infty$ $\quad$ " $\quad$ (da destra)

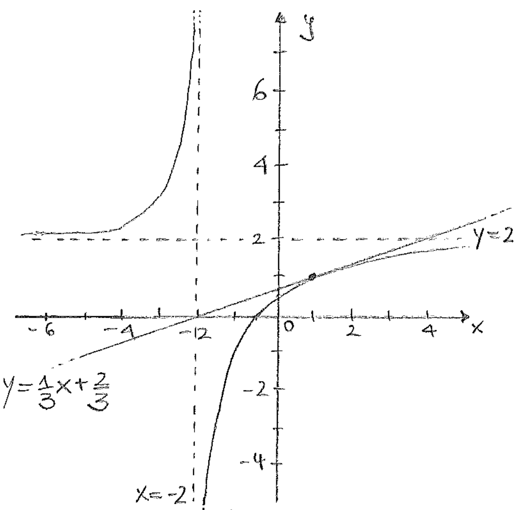


grafico qualitativo di f

NOTA:

$f(x) = \frac{2\cancel{(x+2)}}{\cancel{x+2}} - \frac{3}{x+2} =$

$= 2 - \frac{3}{x+2}$

• f è continua e derivabile nel dom f

$f'(x) = \dfrac{2(x+2)-(2x+1)}{(x+2)^2} = \dfrac{3}{(x+2)^2} > 0$ nel dom f'

$+ \ + \quad -2 \quad + \ + \ +$ $\quad f'(x)$

$\nearrow \quad -2 \quad \nearrow$ $\quad f(x)$

• dom f'' = dom f

$f''(x) = \dfrac{-3\cdot 2\cancel{(x+2)}}{(x+2)^{\cancel{4}3}} = \dfrac{-6}{(x+2)^3}$

$+ \ + \ + \quad -2 \quad - \ - \ - \ - \ - \ -$ $\quad f''(x)$

$\cup \quad -2 \quad \cap$ $\quad f(x)$

ii) $y = f(1) + f'(1)(x-1) \Rightarrow y = 1 + \frac{\cancel{3}^{1}}{\cancel{9}_{3}}(x-1)$

$\underline{y = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}}.$

6) $(-a_1+a_2)^2 \overset{?}{=} a_1^2 + a_2^2$ $\quad$ NO, in generale. Infatti, $(-a_1+a_2)^2 = a_1^2 - 2a_1a_2 + a_2^2$.

Quindi vale l'uguaglianza se e solo se $a_1a_2 = 0$, ossia $a_1=0$ oppure $a_2=0$.

L'uguaglianza è vera se $a_1 \in \mathbb{R}$ e $a_2=0$ (oppure viceversa).

FILA (B)

1) i) $A =$ " $\forall a \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R} : x^2 + 2x = a$ ".

non $A =$ " $\exists a \in \mathbb{R} : \forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 2x \neq a$ ".

Notiamo che $x^2+2x = a \iff x^2+2x-a=0 \iff x_{1/2} = \dfrac{-2 \pm \sqrt{4+4a}}{2} = -1 \pm \sqrt{1+a}$.

Risulta allora che $x^2+2x=a$ ammette (almeno) una soluzione se e solo se $1+a \geq 0$, ossia $a \geq -1$. Possiamo allora asserire che la proposizione A è falsa, e quindi non A è vera. $\square$

ii) $\log_2(|x-6|-x^2) < 3 \iff \log_2(|x-6|-x^2) < \log_2 8$

$\iff \begin{cases} |x-6|-x^2 > 0 \\ |x-6|-x^2 < 8 \end{cases}$ (altrimenti non è definito il membro sinistro della diseq.) ($\log_2 x \nearrow$)

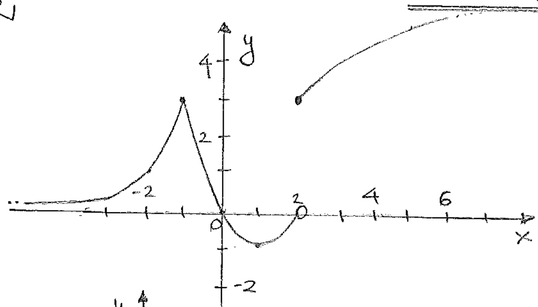
$\iff \begin{cases} x-6 \geq 0 \\ x-6-x^2 > 0 \\ x-6-x^2 < 8 \end{cases}$ o $\begin{cases} x-6 < 0 \\ -x+6-x^2 > 0 \\ -x+6-x^2 < 8 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} x \geq 6 \\ x^2-x+6 < 0 \\ x^2-x+14 > 0 \end{cases}$ o $\begin{cases} x < 6 \\ x^2+x-6 < 0 \\ x^2+x+2 > 0 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} x \geq 6 \\ \emptyset \\ \mathbb{R} \end{cases}$ o $\begin{cases} x < 6 \\ -3 < x < 2 \\ \mathbb{R} \end{cases}$ $\Rightarrow$ $S =]-3, 2[$ $\blacksquare$

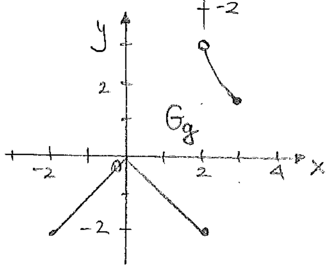
2) i) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f(x) = \begin{cases} 3^{x+2} & \text{se } x \leq -1 \\ x^2 - 2x & \text{se } -1 < x < 2 \\ 3\sqrt{x-1} & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$



$g : [-2, 3] \to \mathbb{R}$

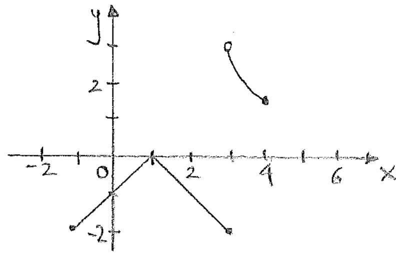
$g(x) = \begin{cases} -|x| & \text{se } -2 \leq x \leq 2 \\ \dfrac{3}{x-1} & \text{se } 2 < x \leq 3 \end{cases}$



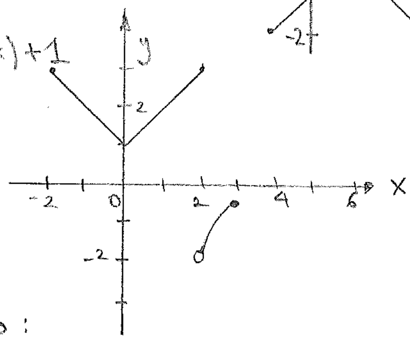
$\square$

ii) $g([-2,3]) = [-2, 0] \cup [\frac{3}{2}, 3[$. g non è iniettiva: basta prendere, per esempio, $x_1 = -2 \neq x_2 = 2$ e si ha $g(x_1) = g(x_2)$. $\square$

iii) $[-1,4] \ni x \longmapsto g(x-1)$



$[-2,3] \ni x \longmapsto -g(x)+1$



iv) • in $x=-1$ abbiamo:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^-} 3^{x+2} = 3 \\ \lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^+} (x^2-2x) = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to -1} f(x) = 3.$$

Poiché inoltre $f(-1)=3$, possiamo concludere che f è continua in $x=-1$.

• in $x=2$ abbiamo:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} (x^2-2x) = 0 \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{3}{x-1} = 3\ (= f(2)) \end{array}\right\} \Rightarrow \nexists \lim_{x\to 2} f(x);$$

possiamo concludere che f non è continua in $x=2$.

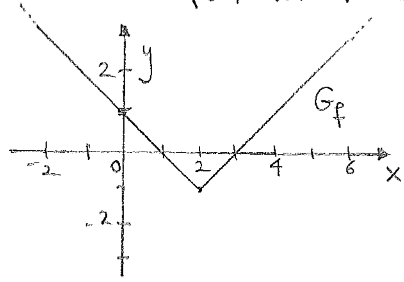
v) Poiché f non è continua in $[-3,3]$ (non essendo continua in $x=2$), f non soddisfa le ipotesi del teorema di Weierstrass. Abbiamo comunque

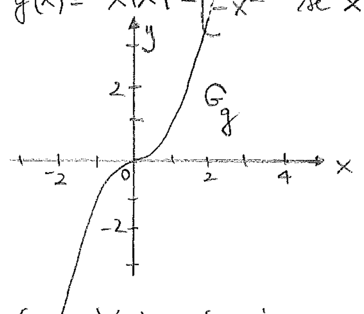
$\min\limits_{[-3,3]} f = \underline{\underline{-1}}$ $\underline{\underline{x=1}}$ pt. di minimo di f su $[-3,3]$ $\max\limits_{[-3,3]} f = \underline{\underline{3\sqrt{2}}}$ $\underline{\underline{x=3}}$ pt. di massimo di f su $[-3,3]$

(ricordo che il teorema di Weierstrass dà condizioni sufficienti per l'esistenza del minimo e del massimo di f, ma non necessarie).

3) $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x) = |x-2| - 1$ $g(x) = x|x| = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \geq 0 \\ -x^2 & \text{se } x < 0 \end{cases}$.

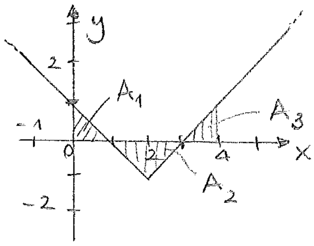
i)





ii) $(f\circ g)(-1) = f(g(-1)) = f(-1) = \underline{\underline{2}}$ $(g\circ f)(1) = g(f(1)) = g(0) = \underline{\underline{0}}$.

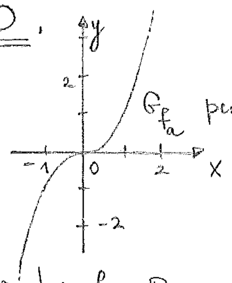
iii) vedi FILA (A), Es. 3) iii).



iv) $\displaystyle\sum_{n=1}^{4}\int_{n-1}^{n} f(x)\,dx = \int_0^4 f(x)\,dx = \text{area } A_1 - \text{area } A_2 + \text{area } A_3$

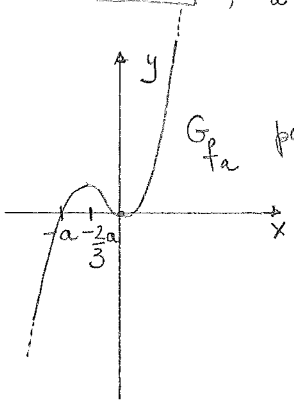
$= \frac{1}{2} - 1 + \frac{1}{2} = \underline{\underline{0}}.$

4) i) se $\boxed{a=0}$, $f_a(x) = x^3$



Se $\boxed{a>0}$, $f_a(x) = x^3 + ax^2$: • dom $f_a = \mathbb{R}$ • $f_a(x) = x^2(x+a)$

$- - \underset{-a}{|} + \underset{0}{\bullet} + + + \to f_a(x)$



• $\lim_{x\to-\infty} f_a(x) = -\infty$ $\lim_{x\to+\infty} f_a(x) = +\infty$

• $f_a'(x) = 3x^2 + 2ax = x(3x+2a)$

$+ + \underset{-\frac{2a}{3}}{\bullet} - \underset{0}{\bullet} + + + \to f_a'(x)$

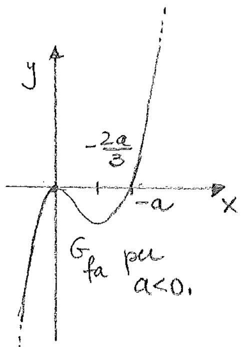
$\nearrow \quad \searrow \quad \nearrow$

$x = -\frac{2a}{3}$ pt. di max. loc. stretto per f_a $f_a\left(-\frac{2a}{3}\right) = \frac{4a^3}{27}$

$x = 0$ pt. di min. loc. stretto per f_a $f_a(0) = 0$.

Se $\boxed{a<0}$, $f_a(x) = x^3 + ax^2$ • dom $f_a = \mathbb{R}$ • $f_a(x) = x^2(x+a)$

$- - \underset{0}{\bullet} - \underset{-a}{\bullet} + + + \to f_a(x)$



• $\lim_{x\to-\infty} f_a(x) = -\infty$, $\lim_{x\to+\infty} f_a(x) = +\infty$.

• $f_a'(x) = 3x^2 + 2ax = x(3x+2a)$ $+ + \underset{0}{\bullet} - \underset{-\frac{2a}{3}}{\bullet} + + + + \to f_a'(x)$

$\nearrow \quad \searrow \quad \nearrow$ $f_a(x)$

$x = 0$ pt. di max. loc. stretto per f_a $f_a(0) = 0$

$x = -\frac{2a}{3}$ pt. di min. loc. stretto per f_a $f_a\left(-\frac{2a}{3}\right) = \frac{4a^3}{27}$

ii) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3 + ax^2}{e^{ax} + 2x^2} = \begin{cases} +\infty & \text{se } a=0 \\ 0 & \text{se } a>0 \\ +\infty & \text{se } a<0. \end{cases}$

5) $\boxed{f(x) = \dfrac{2x-1}{1-x}}$ • dom $f =]-\infty, 1[\cup] 1, +\infty[$

• segno di f

$- - - - \underset{1/2}{\bullet} + + + \to 2x-1$

$+ + + + + \underset{1}{\circ} - - - \to 1-x$

$- - - - \underset{1/2}{\bullet} + \underset{1}{\circ} - - - \to \frac{2x-1}{1-x}$

• $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = -2$ $y = -2$ asintoto orizzontale per f, per $x \to +\infty$ (per $x \to -\infty$)

$\lim_{x\to 1^-} f(x) = +\infty$ $\quad$ $x=1$ asintoto verticale (da sinistra) di f

$\lim_{x\to 1^+} f(x) = -\infty$ $\quad$ " $\quad$ (da destra).

• f continua e derivabile su dom f

$$f'(x) = \frac{2(1-x)+(2x-1)}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x)^2} > 0 \text{ su dom } f'$$

$+ + + + \circ + + + \to f'(x)$

$\nearrow \quad 1 \quad \nearrow \quad f(x)$

• dom f'' = dom f

$$f''(x) = \frac{+2\cancel{(1-x)}}{(1-x)^{\cancel{4}\,3}} = \frac{2}{(1-x)^3}$$

$+ + + + \circ - - - \to f''(x)$

$\cup \quad 1 \quad \cap \quad f(x)$

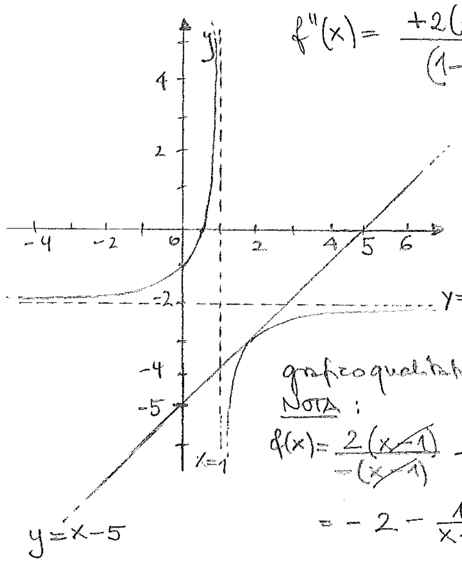


grafico qualitativo di f

NOTA:

$$f(x) = \frac{2\cancel{(x-1)}}{-\cancel{(x-1)}} - \frac{1}{x-1} = -2 - \frac{1}{x-1}$$

ii) $y = f(2) + f'(2)(x-2) \Rightarrow$

$y = -3 + 1(x-2)$

$\underline{y = x-5.}$

6) $(a_1 - a_2)^2 \overset{?}{=} a_1^2 + a_2^2$ $\quad$ NO, in generale.

Infatti $(a_1-a_2)^2 = a_1^2 - 2a_1a_2 + a_2^2$. Quindi vale l'uguaglianza sopra se e solo se $a_1a_2 = 0$, ossia $a_1 = 0$ oppure $a_2 = 0$.

L'uguaglianza è vera se $a_1 \in \mathbb{R}$ e $a_2 = 0$ (oppure viceversa).