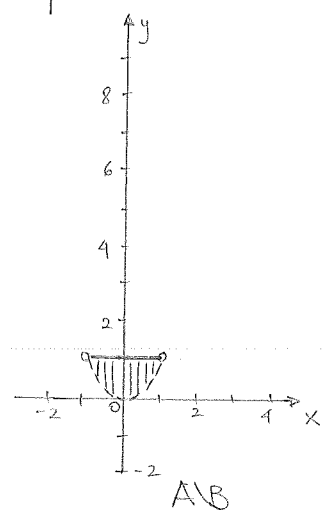
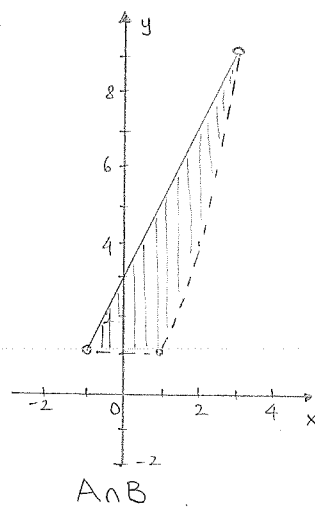
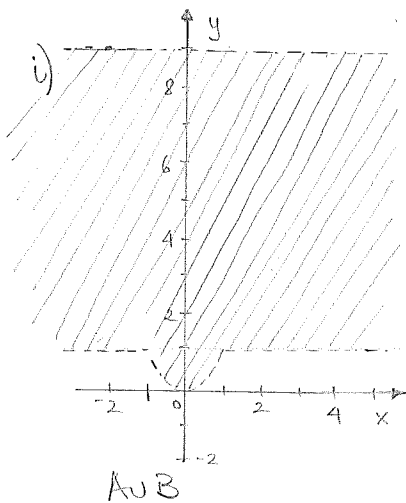
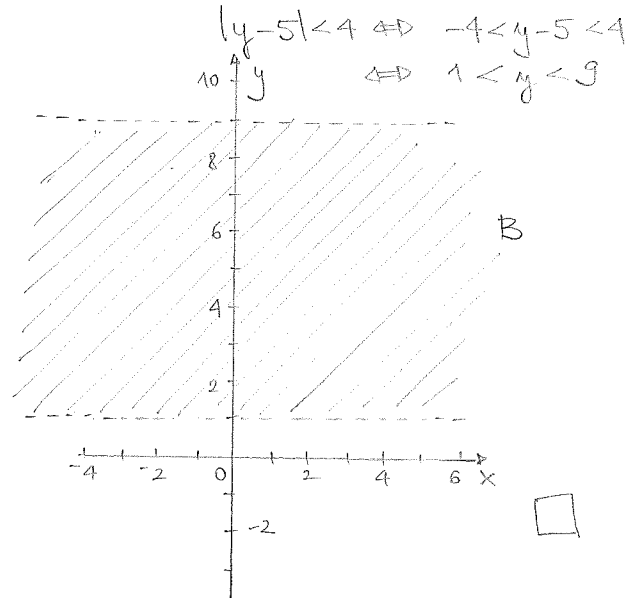
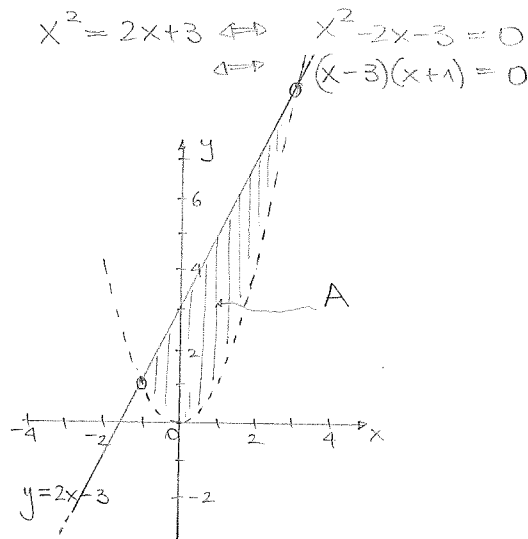


Università di Trento - Dip. di Psicologia e Scienze Cognitive
 CdL in Scienze e Tecniche di Psicologia Cognitiva
 ESAME SCRITTO DI ANALISI MATEMATICA
 a.a. 2014-2015 - Rotondo, 7 settembre 2015

FILA (A)

1) a) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 < y \leq 2x+3\}$

$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |y-5| < 4\}$



ii) $x = k$ con $k \leq -1$ o $k \geq 3$.

b) non $\mathcal{B} = \{ \exists x \in [0,1] : \forall y \in [1,4], (x,y) \notin A \}$.

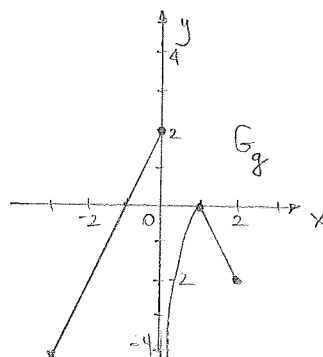
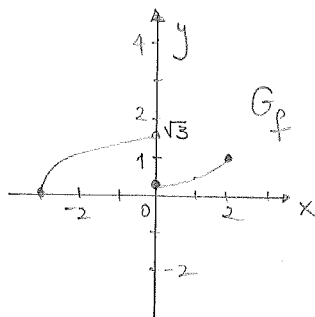
$\mathcal{B}$ è vera! Infatti, preso un qualsiasi $x \in [0,1]$, basta prendere $y = x+1$ e si ha $y \in [1,4]$ e $(x,y) \in A$ (graficamente si vede benissimo questo fatto!).

2) $f, g: [-3, 2] \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x+3} & \text{se } x \in [-3, 0[\\ \frac{1}{(x-3)^2} & \text{se } x \in [0, 2] \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} \log x & \text{se } x \in]0, 1] \\ -2|x| + 2 & \text{se } x \in [-3, 2] \setminus]0, 1]. \end{cases}$$

i)



ii) f non è continua in $x=0 \in [-3, 2]$ ($f(0) = \frac{1}{9} \neq \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \sqrt{3}$)
e quindi non soddisfa le ipotesi

del teorema di Weierstrass. Anche g non soddisfa le ipotesi del teorema:

infatti g non è continua in $x=0 \in [-3, 2]$ ($g(0) = 2 \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = -\infty$).

iii) $\nexists \max_{[-3, 2]} f$; $\exists \min_{[-3, 2]} f = 0 = f(-3)$.

$\nexists \min_{[-3, 2]} g$; $\exists \max_{[-3, 2]} g = 2 = g(0)$.

iv) g non è continua su $[0, 2]$, poiché $g(0) = 2 \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$ (e quindi non è continua in $x=0$).

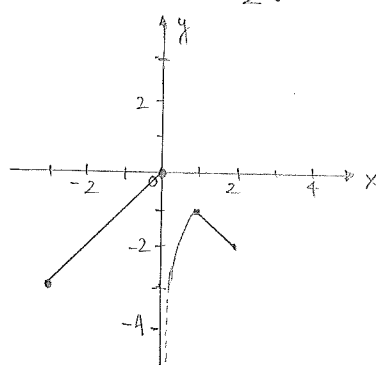
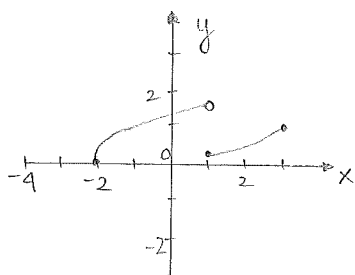
Quindi non soddisfa le ipotesi del teorema di esistenza degli zeri su $[0, 2]$ anche se $g(0) = 2 (> 0)$ e $g(2) = -2 (< 0)$.

Nonostante questo esiste $x_0 \in [0, 2]$ tale che $g(x_0) = 0$.

Infatti $x_0 = 1$!

v) $[-2, 3] \ni x \mapsto f(x-1)$

$[-3, 2] \ni x \mapsto \frac{1}{2}g(x) - 1$



$$3) i) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{kx} - e^{2x} - 4x^2}{1+x^2} = \begin{cases} -\infty & \text{se } k=1 \\ -4 & \text{se } k=2 \\ +\infty & \text{se } k=3 \end{cases}$$

□

$$ii) \int_{-1}^1 \left[(2x+1)^3 - \frac{1}{e^x} \right] dx = \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{(2x+1)^4}{4} + e^{-x} \right]_{-1}^1 = \left(\frac{1}{8} \cdot 81 + \frac{1}{e} \right) - \left(\frac{1}{8} \cdot 1 + e \right) = \frac{1}{e} - e + 10.$$

$$\int_{-3}^{-2} \left| \frac{1}{x} - 1 \right| dx = \int_{-3}^{-2} \left(1 - \frac{1}{x} \right) dx = \left[x - \log|x| \right]_{-3}^{-2} = (-2 - \log 2) - (-3 - \log 3) = 1 + \log \frac{3}{2}.$$

$\frac{1}{x} - 1 < 0$ su $[-3, -2]$

■

4) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = e^{2x} - 2e^x - 3$

i) $h(x) = x^2 - 2x - 3$ è la funzione cercata tale che $f(x) = (h \circ g)(x)$ con $g(x) = e^x$.

□

ii) $h(x) = (x-1)^2 - 4$ su $\mathbb{R}$; allora $h(\mathbb{R}) = [-4, +\infty[$.

□

iii) $E = [1, +\infty[$.

■

5) $f(x) = -\frac{x^3}{3} + 1 + \log x$

• $\text{dom } f =]0, +\infty[$

• $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$

$$\left(\overset{+\infty}{x^3} \left(\underset{\substack{\downarrow 0 \\ x \rightarrow +\infty}}{-\frac{1}{3}} + \underset{\substack{\downarrow 0 \\ x \rightarrow +\infty}}{\frac{1}{x^3}} + \underset{\substack{\downarrow 0 \\ x \rightarrow +\infty}}{\frac{\log x}{x^3}} \right) \right)$$

$x=0$ è asintoto verticale (da destra) per f .

• f è continua e derivabile su $\text{dom } f$.

$$f'(x) = -x^2 + \frac{1}{x} = \frac{-x^3 + 1}{x}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$$



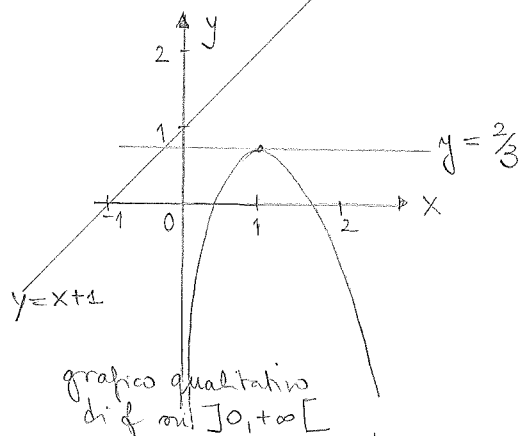
$x=1$ pt. di max. loc. stretto per f

$$f(1) = -\frac{1}{3} + 1 = \frac{2}{3}.$$

• dove $f'' =]0, +\infty[$

$$f''(x) = \frac{-3x^2 \cdot x - (-x^3 + 1)}{x^2} = \frac{-2x^3 - 1}{x^2} < 0 \text{ in }]0, +\infty[$$

Quindi f è concava in $]0, +\infty[$



ii) $y = \frac{2}{3}$ è l'eq. della retta tg al grafico di f nel pr. di coordinata $x = 1$. $\square$

iii) $F(x) = -\frac{x^4}{12} + x \log x$ è una funzione derivabile in $]0, +\infty[$.

$$\text{Inoltre } F'(x) = -\frac{x^3}{3} + \log x + x \cdot \frac{1}{x} = -\frac{x^3}{3} + 1 + \log x = f(x) \text{ in }]0, +\infty[. \quad \square$$

$$\text{iv) } \text{area}(E) = \int_{\frac{1}{2}}^1 (x+1 - f(x)) dx = \int_{\frac{1}{2}}^1 (x+1) dx - F(x) \Big|_{\frac{1}{2}}^1$$

NOTA: $g(x) = x+1$

$> f(x)$
 $\forall x > 0$!

$$= \left[\frac{x^2}{2} + x \right]_{\frac{1}{2}}^1 - F(1) + F\left(\frac{1}{2}\right) = \left[\frac{3}{2} - \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{2} \right) \right] - \left(-\frac{1}{12} \right) + \left(\frac{1}{12 \cdot 16} + \frac{1}{2} \log \frac{1}{2} \right)$$

$$= \left(\frac{3}{2} - \frac{5}{8} \right) + \frac{1}{12} + \frac{1}{12 \cdot 16} - \frac{\log 2}{2} = \frac{7}{8} + \frac{17}{12 \cdot 16} - \frac{\log 2}{2}.$$

6) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ soddisfacente le seg. proprietà:

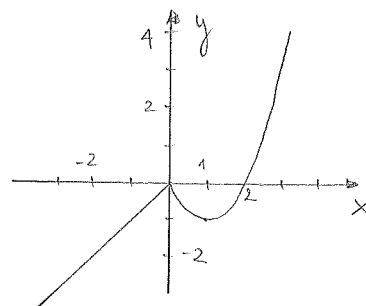
a) f è continua in $\mathbb{R}$ e ha un pr. angoloso in $x=0$;

b) $x=1$ pt. di minimo loc. stretto per f ;

c) f è crescente in $]-\infty, 0]$.

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \leq 0 \\ (x-1)^2 - 1 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

Esempio:

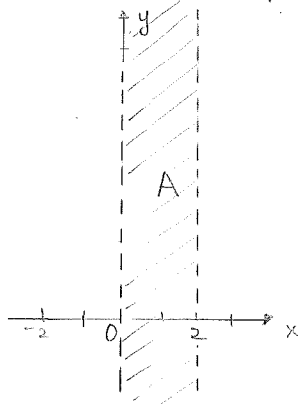


FILA (B)

1) a) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x-1| < 1\}$

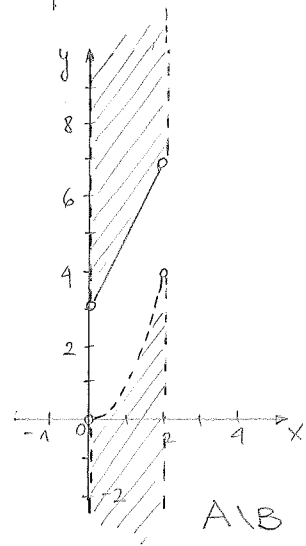
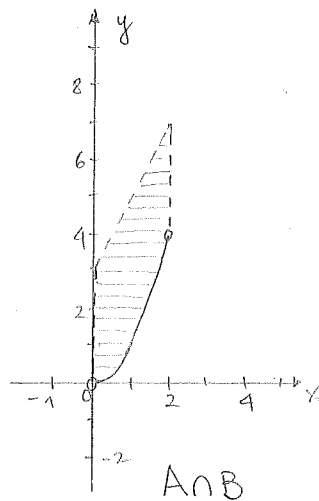
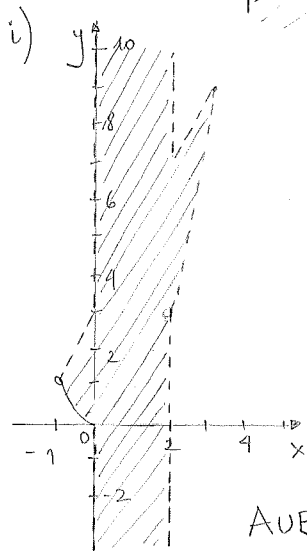
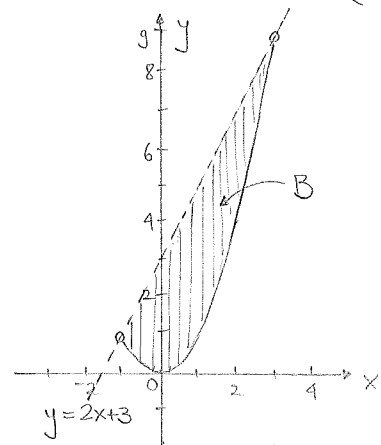
$$|x-1| < 1 \Leftrightarrow -1 < x-1 < 1$$

$$\Leftrightarrow 0 < x < 2$$



$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 \leq y < 2x+3\}$

$$x^2 = 2x+3 \Leftrightarrow (x-3)(x+1) = 0$$



ii) $y = k$ con $k < 0$ o $k \geq 3$.

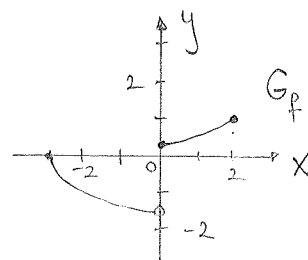
b) non $\mathcal{C} = \exists x \in [0,1] : \forall y \in [1,4], (x,y) \notin B$.

$\mathcal{C}$ è vera! Infatti, preso un qualsiasi $x \in [0,1]$, basta prendere $y = x+1$ e si ha $y \in [1,4]$ e $(x,y) \in B$ (graficamente si vede molto bene questo fatto!).

2) $f: [-3,2] \rightarrow \mathbb{R}$

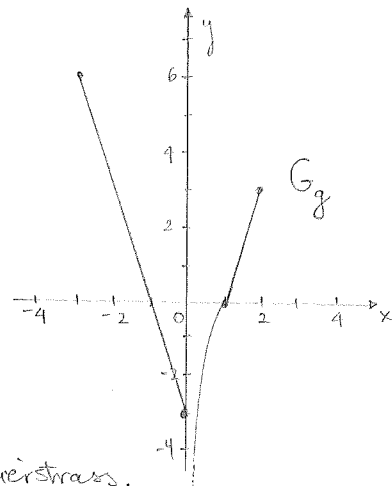
$$f(x) = \begin{cases} -\sqrt{x+3} & \text{se } x \in [-3,0[\\ \frac{1}{(x-3)^2} & \text{se } x \in [0,2] \end{cases}$$

i)



$$g: [-3, 2] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$g(x) = \begin{cases} \log x & \text{se } x \in]0, 1[\\ 3|x| - 3 & \text{se } x \in [-3, 2] \setminus]0, 1[. \end{cases}$$



ii) f non è continua in $x=0 \in [-3, 2]$

$$(f(0) = \frac{1}{3} \neq \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\sqrt{3}) \text{ e quindi}$$

non soddisfare le ipotesi del teorema di Weierstrass. □

Anche g non è continua in $x=0 \in [-3, 2]$ ($g(0) = -3 \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = -\infty$)

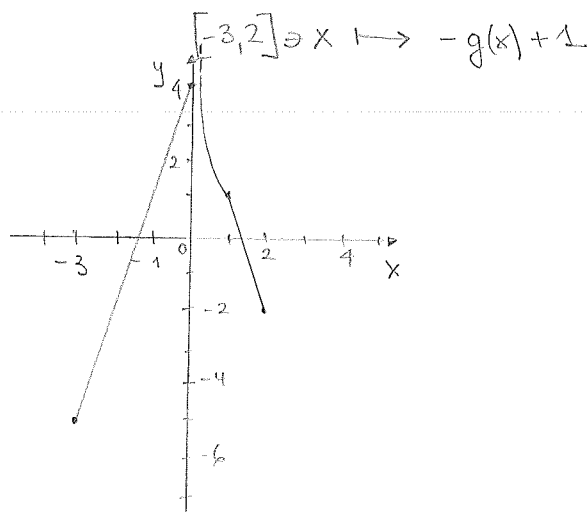
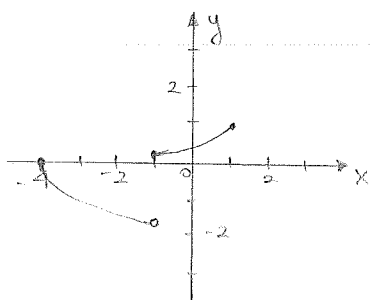
e quindi non soddisfare le ipotesi del teorema di Weierstrass. □

$$\text{iii) } \exists \max_{[-3, 2]} f = 1 = f(2) \quad \nexists \min_{[-3, 2]} f$$

$$\exists \max_{[-3, 2]} g = 6 = g(-3) \quad \nexists \min_{[-3, 2]} g \quad \square$$

iv) g è continua su $[-3, 0]$; inoltre $g(-3) = 6 (> 0)$ e $g(0) = -3 (< 0)$; quindi sono soddisfatte le ipotesi del teorema di esistenza degli zeri su $[-3, 0]$. Quindi $\exists x_0 \in [-3, 0]$ t.c. $g(x_0) = 0$ (infatti si ha subito che $x_0 = -1$). □

$$\text{v) } [-4, 1] \ni x \mapsto f(x+1)$$



$$\text{3) i) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x} - e^{kx} + 3x^2}{1+x^2} = \begin{cases} +\infty & \text{se } k=1 \\ 3 & \text{se } k=2 \\ -\infty & \text{se } k=3 \end{cases} \quad \square$$

$$\text{ii) } \int_0^1 \left[(3x-1)^3 - \frac{1}{e^{2x}} \right] dx = \left[\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{3x-1}{4} \right)^4 + \frac{e^{-2x}}{2} \right]_0^1 = \left(\frac{4}{3} + \frac{1}{2e^2} \right) - \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{2} \right) = \underline{\underline{\frac{3}{4} + \frac{1}{2e^2}}}$$

$$\int_{-4}^{-2} \left| \frac{1}{x} - 2 \right| dx = \int_{-4}^{-2} \left(2 - \frac{1}{x} \right) dx = \left[2x - \log|x| \right]_{-4}^{-2} = (-4 - \log 2) - (-8 - \log 4) = 4 + \log \frac{4^2}{2} = \underline{4 + \log 2}.$$

$\frac{1}{x} - 2 < 0$ in $[-4, -2]$

4) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = e^{2x} - 5e^x - 6$. ■

i) $h(x) = x^2 - 5x - 6$ è la funzione ricercata tale che $f(x) = (h \circ g)(x)$ con $g(x) = e^x$. □

ii) $h(x) = (x - 5/2)^2 - \frac{49}{4}$ su $\mathbb{R}$; si ha $\underline{h(\mathbb{R}) = [-\frac{49}{4}, +\infty[}$. □

iii) $\underline{E = [5/2, +\infty[}$. ■

5) $f(x) = \frac{x^3}{3} - 1 - \log x$ $= - \left(-\frac{x^3}{3} + 1 + \log x \right)$

e questa è la funzione studiata nell'esercizio 5) di Fila (A).

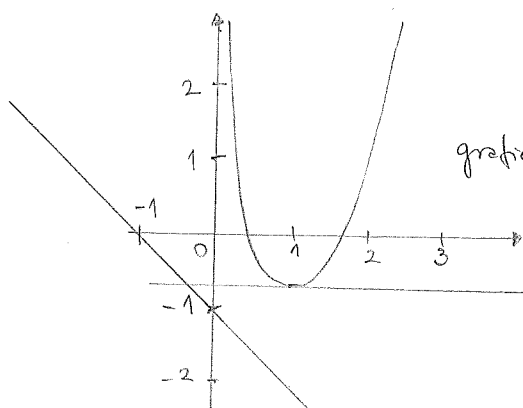


grafico qualitativo di f su $]0, +\infty[$.

$y = -\frac{2}{3}$

ii) $\underline{y = -\frac{2}{3}}$ è l'eq. della retta tg al grafico di f nel pt. di condotta $x = 1$. □

iii) $F(x) = \frac{x^4}{12} - x \log x$ è una funzione derivata su $]0, +\infty[$ e $F'(x) = \frac{x^3}{3} - \log x - 1 = f(x)$ su $]0, +\infty[$. □

iv) $\text{area}(E) = \int_1^2 (f(x) - (-x-1)) dx = F(x) \Big|_1^2 + \int_1^2 (x+1) dx =$

NOTA: $g(x) = -x-1$

$< f(x) \forall x \in]0, +\infty[$

$$\begin{aligned} &= F(2) - F(1) + \left[\frac{x^2}{2} + x \right]_1^2 = \\ &= \left(\frac{16}{12} - 2 \log 2 \right) - \frac{1}{12} + (2+2) - \left(\frac{1}{2} + 1 \right) \\ &= \frac{4}{3} - \frac{1}{12} + 4 - \frac{3}{2} - 2 \log 2 = \underline{\underline{\frac{15}{4} - 2 \log 2}}. \end{aligned}$$

■

6) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ soddisfacente le seg. proprietà:

a) f è continua su $\mathbb{R}$ e ha un pt. angoloso in $x=0$;

b) $x=1$ pt. di massimo loc. stretto per f ;

c) f è decrescente su $]-\infty, 0]$.

Esempio:

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{se } x \leq 0 \\ -(x-1)^2 + 1 & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

