

Università degli Studi di Trento - Dip. di Psicologia e Scienze Cognitive
CDL in Scienze e Tecniche di Psicologia Cognitiva
VERIFICA SETTIMANALE DI ANALISI MATEMATICA
a.a. 2014/15 - Rovereto, 10-14 novembre

(N.8)

$$1) a) \cdot 3^{|x|} \cdot 3^{-x} > 9^{x^2} \Leftrightarrow 3^{|x|-x} > 3^{2x^2} \Leftrightarrow |x|-x > 2x^2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 2x^2 < 0 \end{cases} \circ \begin{cases} x < 0 \\ 2x^2 + 2x < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ \emptyset \end{cases} \circ \begin{cases} x < 0 \\ x(x+1) < 0 \end{cases} \Rightarrow S =]-1, 0[;$$

$$\cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{|x-1|} \cdot 4^x \leq 1 \Leftrightarrow 4^{-|x-1|+x} \leq 4^0 \Leftrightarrow -|x-1|+x \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ -(x-1)+x \leq 0 \end{cases} \circ \begin{cases} x < 1 \\ (x-1)+x \leq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ 1 \leq 0 \\ \text{impossibile} \end{cases} \circ \begin{cases} x < 1 \\ 2x \leq 1 \end{cases} \Rightarrow S =]-\infty, \frac{1}{2}];$$

$$\cdot \log_4(x^2+3) = 1 \Leftrightarrow x^2+3 = 4 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Rightarrow S = \{-1, 1\}.$$

$$b) \cdot e^{x^2-2x} \leq 1 \Leftrightarrow e^{x^2-2x} \leq e^0 \Leftrightarrow x^2-2x \leq 0 \Rightarrow S = [0, 2];$$

$$\cdot \log_{\frac{1}{2}} |x| \geq 0 \Leftrightarrow 0 < |x| \leq 1 \Rightarrow S = [-1, 1] \setminus \{0\};$$

$$\cdot 4^x = 2 \cdot 2^{x^2-4} \Leftrightarrow 2^{2x} = 2^{1+x^2-4} \Leftrightarrow 2^{2x} = 2^{x^2-3} \Leftrightarrow 2x = x^2-3$$

$$\Leftrightarrow x^2-2x-3=0 \Leftrightarrow (x-3)(x+1)=0 \Rightarrow S = \{-1, 3\};$$

$$c) \cdot \log_2(1+3x^2) - \log_2 x^2 \leq \log_2 4$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1+3x^2 > 0 \\ x^2 > 0 \\ \frac{1+3x^2}{x^2} \leq 4 \end{cases}$$

altrimenti non sono ben definiti i logaritmi

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ \frac{1-x^2}{x^2} \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ 1-x^2 \leq 0 \end{cases}$$

segue
dalle proprietà
del logaritmo

$$S =]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[;$$

$$\cdot \log_{\frac{1}{3}}(x^2+1) - \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{3} \leq 0 \Leftrightarrow \log_{\frac{1}{3}}(x^2+1) + \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{3} \leq \log_{\frac{1}{3}} 1$$

$$\Leftrightarrow \log_{\frac{1}{3}} \left[\frac{1}{3}(x^2+1) \right] \leq \log_{\frac{1}{3}} 1$$

$$\begin{cases} \frac{1}{3}(x^2+1) > 0 & (\text{altamente non è ben definito il membro sinistro della disug}) \\ \frac{1}{3}(x^2+1) \geq 1 & (\log_{\frac{1}{3}} x \text{ è una funzione decrescente}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ x^2 \geq 2 \end{cases}$$

$$S =]-\infty, -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, +\infty[;$$

$$\bullet \log(x^2+x) > \log(2|x|) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+x > 0 \\ 2|x| > 0 \\ x^2+x > 2|x| \end{cases} \begin{cases} \text{altamente non sono ben} \\ \text{definiti i logaritmi} \\ \text{(per la monotonia di } \log x) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x < -1 \text{ o } x > 0 \\ x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ x^2+x > 2|x| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -1 \\ x^2+x > -2x \end{cases} \text{ o } \begin{cases} x > 0 \\ x^2+x > 2x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x < -1 \\ x^2+3x > 0 \end{cases} \text{ o } \begin{cases} x > 0 \\ x^2-2x > 0 \end{cases} \Rightarrow S =]-\infty, -3[\cup]2, +\infty[.$$

□

$$d) \bullet |4x^2-x| > 3 \Leftrightarrow 4x^2-x < -3 \text{ o } 4x^2-x > 3$$

$$\Leftrightarrow 4x^2-x+3 < 0 \text{ (impossibile)} \text{ o } 4x^2-x-3 > 0 \Rightarrow S =]-\infty, -\frac{3}{4}[\cup]1, +\infty[;$$

$$\bullet 4x^2-2|x| \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 4x^2-2x \leq 0 \end{cases} \text{ o } \begin{cases} x < 0 \\ 4x^2+2x \leq 0 \end{cases}$$

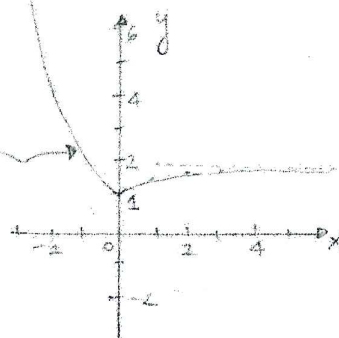
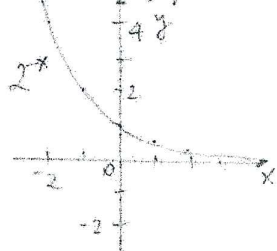
$$\Rightarrow S = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}].$$

$$\bullet \log(x+1) - \log_{\frac{1}{3}}(3x-1) < \log 4 \Leftrightarrow \log(x+1) + \log(3x-1) < \log 4$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+1 > 0 \\ 3x-1 > 0 \\ (x+1)(3x-1) < 4 \end{cases} \text{ per buona definizione dei termini}$$

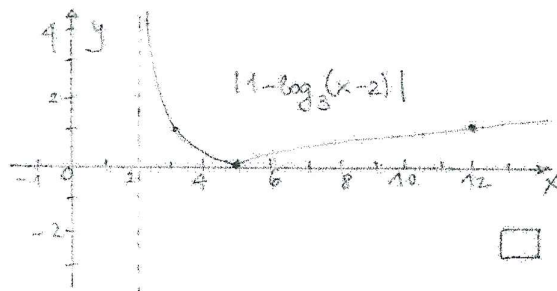
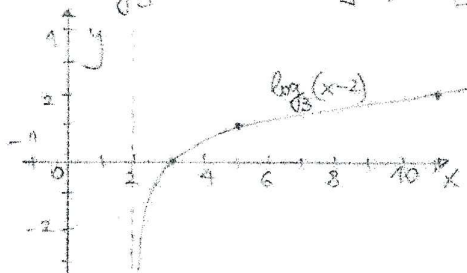
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > -1 \\ x > \frac{1}{3} \\ 3x^2+2x-5 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{1}{3} \\ -\frac{5}{3} < x < 1 \end{cases} \Rightarrow S =]\frac{1}{3}, 1[.$$

$$2) \bullet |2^{-x}-1|+1 = |(\frac{1}{2})^x-1|+1 \quad \mathbb{R}$$

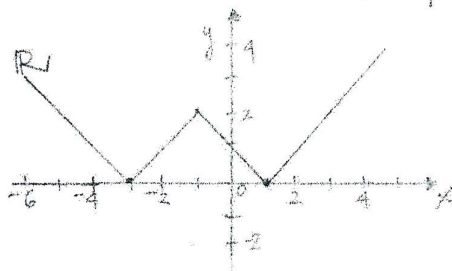


□

• $|1 - \log_3(x-2)| \quad]2, +\infty[$

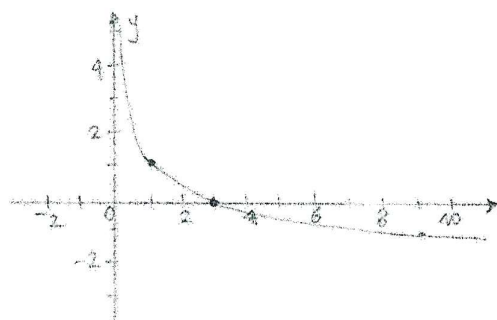


• $||x+1|-2|$



• $\log_{\frac{1}{3}} x - \log_{\frac{1}{2}} 2$

$= \log_{\frac{1}{3}} x + 1 \quad]0, +\infty[$



3) Dobbiamo $f(x) = x^4 - 3x - 2$ in $[-1, 0]$. Allora l'equazione $x^4 = 3x + 2$ ha una soluzione $x_0 \in [-1, 0]$ se e solo se $f(x_0) = 0$. Quindi proviamo che esiste $x_0 \in [-1, 0]$ tale che $f(x_0) = 0$. Osserviamo che x^4 è una funzione decrescente in $] -\infty, 0]$ e $-3x - 2$ è decrescente in $\mathbb{R}$; quindi $f(x)$ è decrescente in $[-1, 0]$ (essendo somma di funzioni decrescenti), quindi interseca l'asse delle x al più un punto, da cui segue l'unicità di x_0 (una volta dimostrato la sua esistenza).

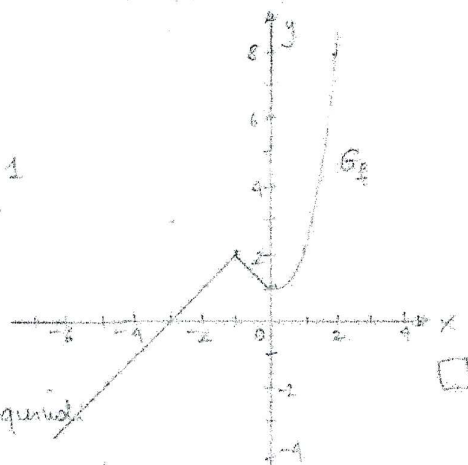
Notiamo che $f(-1) = 1 + 3 - 2 = 2 (>0)$ e $f(0) = -2 (<0)$. Poiché f è continuo, per il teorema di esistenza degli zeri esiste $x_0 \in]-1, 0[$ tale che $f(x_0) = 0$.

Consideriamo il punto medio di $]-1, 0[$; è $x = -\frac{1}{2}$; ora

$f(-\frac{1}{2}) = \frac{1}{16} + \frac{3}{2} - 2 = \frac{25}{16} - 2 < 0$. Quindi, per il teorema di esistenza degli zeri segue che $x_0 \in]-1, -\frac{1}{2}[$. Consideriamo il punto medio di $]-1, -\frac{1}{2}[$; è $x = -\frac{3}{4}$. Ora $f(-\frac{3}{4}) = \frac{81}{16^2} + \frac{9}{4} - 2 (> 0)$. Poiché $f(-\frac{3}{4}) > 0$ e $f(-\frac{1}{2}) < 0$, possiamo concludere che $x_0 \in]-\frac{3}{4}, -\frac{1}{2}[$. Concludiamo ponendo $]\tilde{a}, \tilde{b}[\doteq]-\frac{3}{4}, -\frac{1}{2}[$, con $\tilde{b} - \tilde{a} \leq \frac{1}{4}$. $\blacksquare$

4) i) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} -|x+1|+2 & \text{se } x < 0 \\ x^2+1 & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ 3^x-1 & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$



ii) $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

f è continua su $[-2, 2]$, quindi

f soddisfa le ipotesi del teorema di Weierstrass.

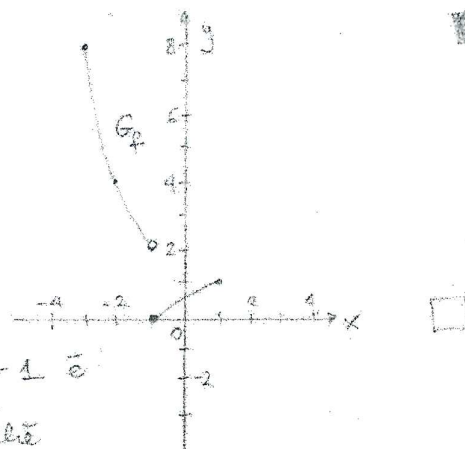
$\min_{[-2, 2]} f = 1$ $x \in \{-2, 0\}$ sono i pt. di minimo per f su $[-2, 2]$;

$\max_{[-2, 2]} f = 8$ $x = 2$ pt. di massimo per f su $[-2, 2]$. $\square$

iii) $f(-4) = -1 (< 0)$, $f(0) = 1 (> 0)$ ed f è continua su $[-4, 0]$: quindi f soddisfa le ipotesi del teorema di esistenza degli zeri su $[-4, 0]$. Si ottiene infatti (si può leggere (!) dal grafico) che $x_0 = -3$ è uno zero per f su $[-4, 0]$. $\blacksquare$

5) 1) $f: [-3, 1] \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} (\frac{1}{2})^x & \text{se } -3 \leq x < -1 \\ \log_3(x+2) & \text{se } -1 \leq x \leq 1 \end{cases}$$



ii) f non è continua su $[-3, 1]$; $x = -1$ è

un pt. di discontinuità per f , poiché

$0 = f(-1) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = 2$. Osserviamo che esistono

comunque massimo e minimo di f in $[-3, 1]$ (questo fatto non è in contraddizione con il teorema di Weierstrass; infatti, quest'ultimo teorema ci dà condizioni suff. per l'esistenza degli estremi, ma non necessarie).

$$\min_{[-3, 1]} f = 0 \quad x = -1 \text{ pt. di minimo per } f \text{ in } [-3, 1];$$

$$\max_{[-3, 1]} f = 8 \quad x = -3 \text{ pt. di massimo per } f \text{ in } [-3, 1]. \quad \square$$

ii) f non è continua in $[-3, 1]$; inoltre $f(-3) = 8 (> 0)$ e $f(1) = 1 (> 0)$.

Non sono soddisfatte le ipotesi del teorema di esistenza degli est. in $[-3, 1]$. Nonostante questo (il teorema di Jenson degli zeri ci dà condizioni suff. per l'esistenza di zeri per una funzione, ma non necessarie) f ha uno zero in $[-3, 1]$: è $x = -1$. $\blacksquare$

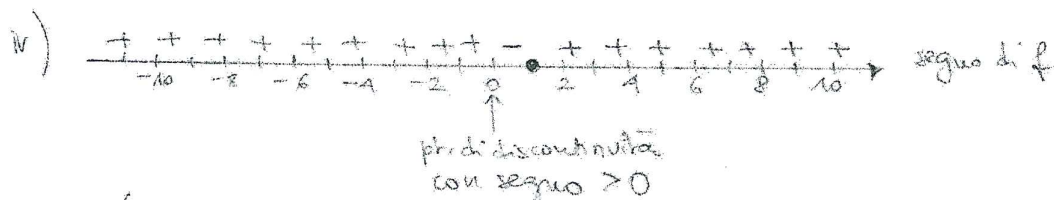
6) i) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$; $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = 1$; $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = 2$;

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -1;$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 2; \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 2; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0; \quad \square$$

ii) $f(-1) = 1$; $f(0) = 1$; $f(2) = 4$; $\square$

iii) f è discontinua nei pt. $x = -1$, $x = 0$ e $x = 2$. $\square$



v) $\cancel{\min_{[0, 1]} f}$; $\max_{[0, 1]} f = 1. \quad \blacksquare$