

Università di Trento - Dip. di Psicologia e Scienze Cognitive
 CdL in Scienze e Tecniche di Psicologia Cognitiva
 ESAME SCRITTO DI ANALISI MATEMATICA
 a.a. 2014-2015 - Rovereto, 29 giugno 2015

FILA (A)

1) i) $A = \{x \in \mathbb{R} : \log(x^2 - 2x + 2) \leq 0\} = \underline{\underline{\{1\}}}$.

Infatti $\log(x^2 - 2x + 2) \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x + 2 > 0 \\ x^2 - 2x + 2 \leq 1 \end{cases}$

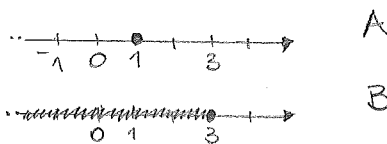
$\Leftrightarrow \begin{cases} \mathbb{R} \\ x^2 - 2x + 1 \leq 0, \Rightarrow x = 1. \end{cases}$

$B = \{x \in \mathbb{R} : |x-1| \leq 6\} = \underline{\underline{[-\infty, 3]}}$.

Infatti, $|x-1| \leq 6 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 \geq 0 \\ x(x-1) \leq 6 \end{cases} \circ \begin{cases} x-1 < 0 \\ x(-x+1) \leq 6 \end{cases}$

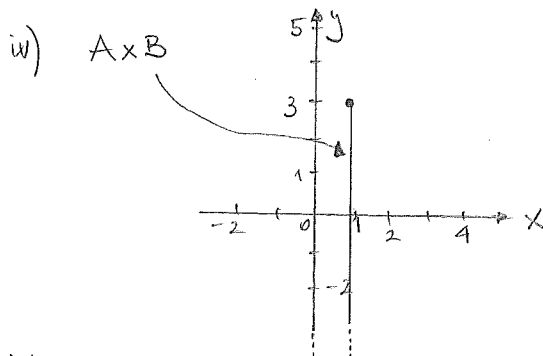
$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ (x-3)(x+2) \leq 0 \end{cases} \circ \begin{cases} x < 1 \\ x^2 - x + 6 \geq 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ -2 \leq x \leq 3 \end{cases} \circ \begin{cases} x < 1 \\ \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow x \in]-\infty, 3]$



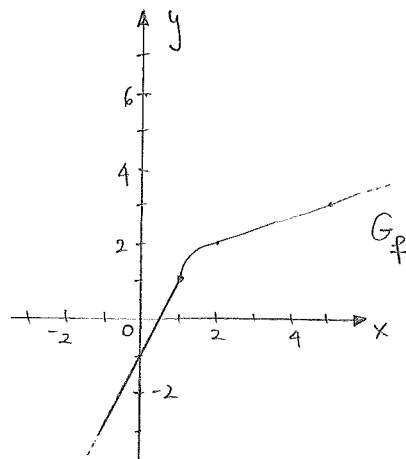
ii) $A \cup B = \underline{\underline{B}}$ $A \cap B = \underline{\underline{A}}$ $B \setminus A = \underline{\underline{[-\infty, 3] \setminus \{1\}}}$.

iii) A è un insieme limitato; B non è un insieme limitato (B è limitato superiormente, ma non è limitato inferiormente).



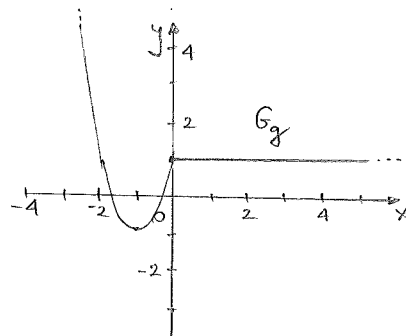
2) i) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 2x-1 & \text{se } x \leq 1 \\ \sqrt{x-1}+1 & \text{se } x > 1 \end{cases}$$



$$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

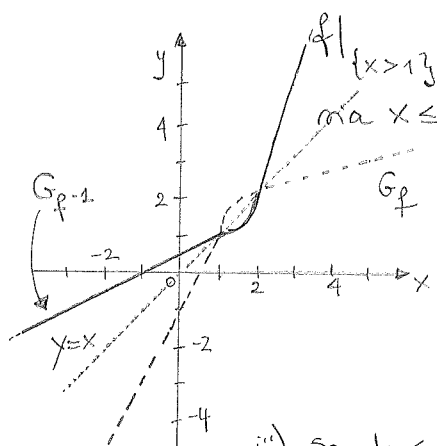
$$g(x) = \begin{cases} 2x^2 + 4x + 1 & \text{se } x \leq 0 \\ 1 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$



$$\begin{aligned} y &= 2x^2 + 4x + 1 \\ &= 2(x^2 + 2x) + 1 \\ &= 2(x+1)^2 - 1 \end{aligned}$$



ii) $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è suriettiva e iniettiva ($f|_{\{x \leq 1\}}$ è strett. crescente,



$f|_{\{x > 1\}}$ è strettamente crescente. Inoltre $f(x) < f(y)$ comunque
ma $x \leq 1$ e $y > 1$). Quindi $\exists f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

$$f^{-1}(0) = z \Leftrightarrow f(z) = 0 \Rightarrow \underline{z = \frac{1}{2}}.$$

$$f^{-1}(-1) = z \Leftrightarrow f(z) = -1 \Rightarrow \underline{z = 0}.$$



iii) Se $k < -1$ Non sono soluzioni dell'eq. $g(x) = k$;

$k = -1$ È una soluzione " ;

$-1 < k < 1$ Sono due soluzioni " ;

$k = 1$ Sono infinite soluzioni " ;

$k > 1$ È una soluzione dell'eq. $g(x) = k$. □

iv) $(g \circ g)(-1) = g(g(-1)) = g(-1) = \underline{-1}.$

$(g \circ g)(-3) = g(g(-3)) = g(7) = \underline{1}.$ ■

3) Notiamo che $x^3 - \frac{1}{2} = -\sqrt{x} \Leftrightarrow x^3 - \frac{1}{2} + \sqrt{x} = 0$. Poniamo allora

$f(x) = x^3 - \frac{1}{2} + \sqrt{x}$ su $[0, 1]$ e proviamo che $\exists x_0 \in [0, 1] : f(x_0) = 0$.

Oss. Innanzitutto che $x^3 - \frac{1}{2}$ è una funzione crescente su $[0, 1]$ come lo è la funzione $\sqrt{x}$; essendo la somma di due funzioni crescenti una funzione crescente, risulta che $f(x)$ è crescente, e quindi interseca l'asse delle x in al più un punto, da cui segue l'unicità di x_0 (Una volta dimostrata la sua esistenza).

Notiamo che f è continua in $[0,1]$; inoltre $f(0) = -\frac{1}{2} (< 0)$ e $f(1) = \frac{3}{2} (> 0)$.
Dal teorema di esistenza degli zeri segue che $\exists x_0 \in]0,1[$ tale che $f(x_0) = 0$.

Consideriamo il punto medio di $[0,1]$; è $x = \frac{1}{2}$; allora $f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{8} - \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} (> 0)$. Quindi, per il teorema di Jena degli zeri segue che $x_0 \in]0, \frac{1}{2}[$.

Consideriamo il pt. medio di $]0, \frac{1}{2}[$; è $x = \frac{1}{4}$. Ora $f(\frac{1}{4}) = \frac{1}{64} - \frac{1}{4} + \frac{1}{\sqrt{2}} > 0$.

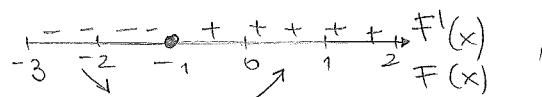
Poiché $f(0) < 0$ e $f(\frac{1}{4}) > 0$, possiamo concludere che $x_0 \in]0, \frac{1}{4}[$. Ponendo

$]\tilde{a}, \tilde{b}[\doteq]0, \frac{1}{4}[$ ni ha $x_0 \in]\tilde{a}, \tilde{b}[$ con $\tilde{b} - \tilde{a} \leq \frac{1}{4}$, come richiesto. $\blacksquare$

4) Sia $F: [-3,2] \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x) = \int_{-3}^x ((t+1)e^{t^2}) dt = f(t)$, $x \in [-3,2]$.

i) Dobbiamo trovare gli $x \in [-3,2]$ t.c. $F'(x) = 0$. Ora, dal teorema fondamentale del calcolo integrale abbiamo $F'(x) = (x+1)e^{x^2} = f(x)$, $x \in [-3,2]$; quindi $F'(x) = 0 \Leftrightarrow \underline{x = -1}$ (l'unico pt. critico di F).

Inoltre



quindi F è decrescente in $[-3, -1]$ e crescente in $[-1, 2]$. $\square$

ii) Dal pt. i) segue che $x = -1$ è un pt. di minimo loc. stretto per F . $\square$

iii) Notiamo che $F(-3) = 0$. Inoltre F è decrescente in $[-3, -1]$; risulta quindi che $F(-1) < 0$. $\square$

iv) Da $F'(x) = (x+1)e^{x^2}$, $x \in [-3,2]$ segue $F''(x) = e^{x^2} + (x+1)2xe^{x^2} = (x^2 + 2x + 1)e^{x^2}$.

Poiché $F''(x) > 0 \forall x \in [-3,2]$, possiamo concludere che F è convessa in $[-3,2]$. $\blacksquare$

5) $\boxed{f(x) = e^{-x} - e^{-2x}} = e^{-x}(1 - e^{-x})$ (oppure $\frac{e^x - 1}{e^{2x}}$)

• dom $f = \mathbb{R}$

• segno di f



• $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

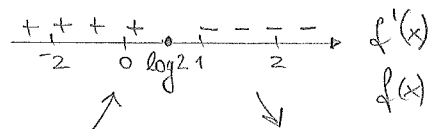
$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ $y = 0$ asintoto orizzontale per f (per $x \rightarrow +\infty$).

• dom $f' = \mathbb{R}$ $f'(x) = -e^{-x} + 2e^{-2x} = \frac{-e^x + 2}{e^{2x}}$

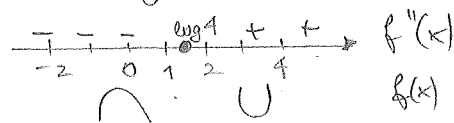
$f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x = 2 \Leftrightarrow x = \log 2$ unico pt. critico per f

$f(\log 2) = \frac{1}{4}$

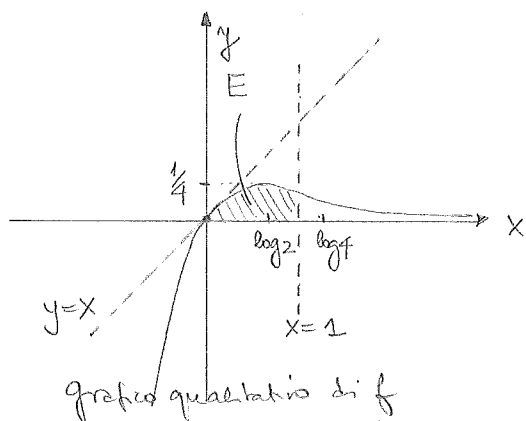
$x = \log 2$ è pt. di massimo loc.
stretto per f



• dom $f'' = \mathbb{R}$ $f''(x) = e^{-x} - 4e^{-2x} = \frac{e^x - 4}{e^{2x}}$



$f(\log 4) = \frac{1}{4} - \frac{1}{16} = \frac{3}{16}$



ii) $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ eq. della tg
al grafico di f nel pt. $(x_0, f(x_0))$ e
quindi:

$y = 0 + 1(x - 0) \Rightarrow y = x$ è
l'eq. della retta tg cercata. $\square$

iii) $\text{area}(E) = \int_0^1 f(x) dx =$

$= \int_0^1 (e^{-x} - 2e^{-2x}) dx = \left[-e^{-x} + \frac{1}{2}e^{-2x} \right]_0^1 = \left(-\frac{1}{e} + \frac{1}{2e^2} \right) - \left(-1 + \frac{1}{2} \right)$
 $= \frac{1}{2} - \frac{1}{e} + \frac{1}{2e^2}$

6) $D_{10,5} = \frac{10!}{5!} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6$

FILA (B)

1) i) $A = \{x \in \mathbb{R} : x|x-2| \leq 8\} = \underline{[-\infty, 4]}$.

Infatti, $x|x-2| \leq 8 \Leftrightarrow \begin{cases} x-2 \geq 0 \\ x(x-2) \leq 8 \end{cases} \quad \circ \quad \begin{cases} x-2 < 0 \\ x(-x+2) \leq 8 \end{cases}$

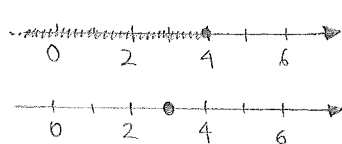
$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ (x-4)(x+2) \leq 0 \end{cases} \quad \circ \quad \begin{cases} x < 2 \\ x^2 - 2x + 8 \geq 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ -2 \leq x \leq 4 \end{cases} \quad \circ \quad \begin{cases} x < 2 \\ \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow x \in \underline{[-\infty, 4]}.$

$B = \{x \in \mathbb{R} : \log(x^2 - 6x + 10) \leq 0\} = \underline{\{3\}}.$

Infatti, $\log(x^2 - 6x + 10) \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 6x + 10 > 0 \\ x^2 - 6x + 10 \leq 1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \mathbb{R} \\ x^2 - 6x + 9 \leq 0 \end{cases} \Rightarrow x = 3.$



$M=A$

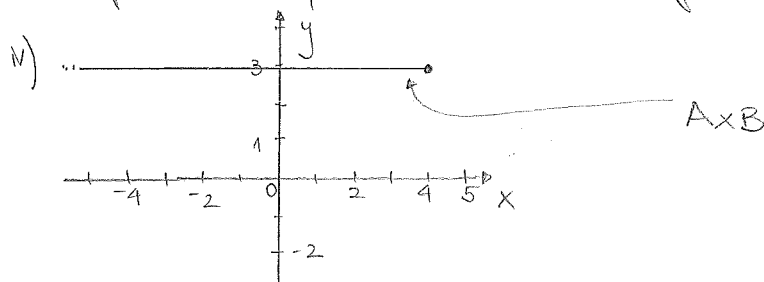
B



ii) $A \cup B = \underline{A}$ $A \cap B = \underline{B}$ $B \setminus A = \underline{\emptyset}$

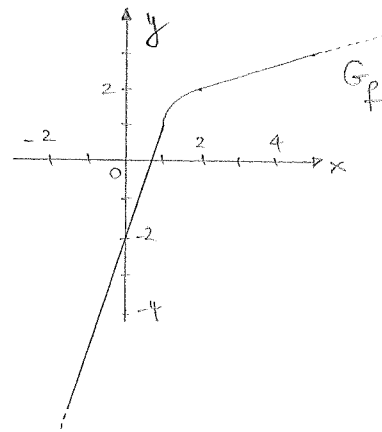


iii) B è un insieme limitato; A non è un insieme limitato (A è limitato superiormente, ma non è limitato inferiormente).



2) i) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

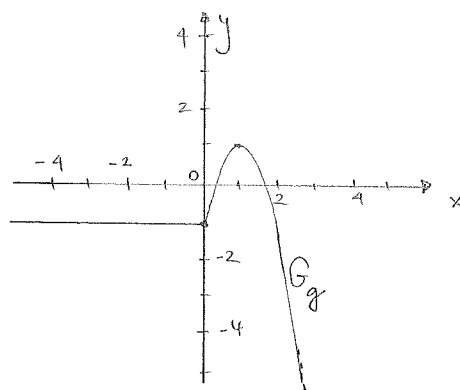
$f(x) = \begin{cases} 3x-2 & \text{se } x \leq 1 \\ \sqrt{x-1}+1 & \text{se } x > 1 \end{cases}$



$$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

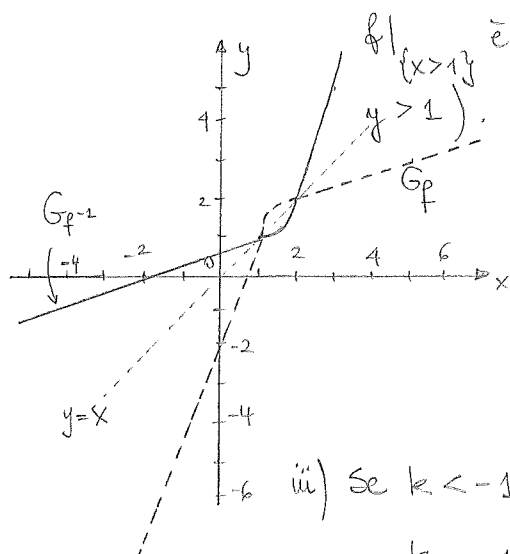
$$g(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x \leq 0 \\ -2x^2 + 4x - 1 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} y &= -2x^2 + 4x - 1 \\ &= -2(x^2 - 2x) - 1 \\ &= -2(x-1)^2 + 1 \end{aligned}$$



□

ii) $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è suriettiva e iniettiva ($f|_{\{x \leq 1\}}$ è strett. crescente, $f|_{\{x > 1\}}$ è strett. crescente, l'ubbe $f(x) < f(y)$ comunque sia $x \leq 1$ e $y > 1$). Quindi $\exists f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.



$$f^{-1}(0) = z \Leftrightarrow f(z) = 0 \Leftrightarrow \underline{z = \frac{2}{3}}$$

$$f^{-1}(-1) = z \Leftrightarrow f(z) = -1 \Leftrightarrow \underline{z = \frac{1}{3}}$$

□

iii) Se $k < -1$ $\exists$ una soluzione dell'eq. $g(x) = k$;

$k = -1$ Sono infinite soluzioni " ;

$-1 < k < 1$ Sono due soluzioni " ;

$k = 1$ $\exists$ una soluzione dell'eq. " ;

$k > 1$ $\nexists$ soluzioni dell'eq. $g(x) = k$. □

$$iv) (g \circ g)(1) = g(g(1)) = g(1) = \underline{1}.$$

$$(g \circ g)(3) = g(g(3)) = g(-7) = \underline{-1}.$$

■

3) Notiamo che $-2x^3 + \frac{1}{2} = \sqrt{x} \Leftrightarrow -2x^3 + \frac{1}{2} - \sqrt{x} = 0$. Poniamo allora $f(x) = -2x^3 + \frac{1}{2} - \sqrt{x}$ su $[0, 1]$ e proviamo che $\exists x_0 \in [0, 1] : f(x_0) = 0$. Osserviamo che $-2x^3 + \frac{1}{2}$ è una funzione decrescente su $[0, 1]$ come lo è la funzione $-\sqrt{x}$; essendo la somma di due funzioni decrescenti una funzione decrescente, risulta che $f(x)$ è decrescente, e quindi interseca l'asse delle x in al più un punto, da cui segue l'unicità

di x_0 (una volta provata la sua esistenza).

Osserviamo che f è continua in $[0, 1]$; inoltre $f(0) = \frac{1}{2} (> 0)$ e $f(1) = -\frac{5}{2} (< 0)$. Dal teorema di esistenza degli zeri segue che $\exists x_0 \in]0, 1[$ tale che $f(x_0) = 0$.

Consideriamo il punto medio di $[0, 1]$; è $x = \frac{1}{2}$; allora $f(\frac{1}{2}) = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{4} - \frac{1}{\sqrt{2}} (< 0)$. Quindi, per il teorema di esistenza degli zeri segue che $x_0 \in]0, \frac{1}{2}[$.

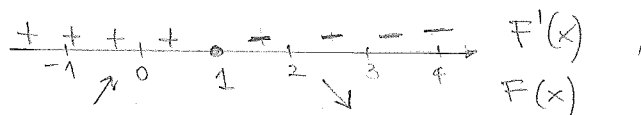
Consideriamo il pt. medio di $]0, \frac{1}{2}[$; è $x = \frac{1}{4}$.

Ora $f(\frac{1}{4}) = -\frac{1}{32} + \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} < 0$. Poiché $f(0) > 0$ e $f(\frac{1}{4}) < 0$, possiamo concludere che $x_0 \in]0, \frac{1}{4}[$. Ponendo $\tilde{a}, \tilde{b} \doteq]0, \frac{1}{4}[$ si ha $x_0 \in \tilde{a}, \tilde{b}[$ con $\tilde{b} - \tilde{a} \leq \frac{1}{4}$, come richiesto. $\blacksquare$

4) Sia $F: [-4, 4] \rightarrow \mathbb{R}$ $F(x) = \int_{-4}^x (1-t) e^{t^2} dt \quad x \in [-4, 4]$.

i) Dobbiamo trovare gli $x \in [-4, 4]$ t.c. $F'(x) = 0$. Dal teorema fondamentale del calcolo integrale abbiamo $F'(x) = (1-x)e^{x^2}$, $x \in [-4, 4]$; quindi $F'(x) = 0 \Leftrightarrow \underline{x = 1}$ (l'unico pt. critico di F).

Inoltre



quindi F è crescente in $[-4, 1]$ e decrescente in $[1, 4]$. $\square$

ii) Dal pr. i) segue che $x = 1$ è un pt. di max. loc. attinto per F . $\square$

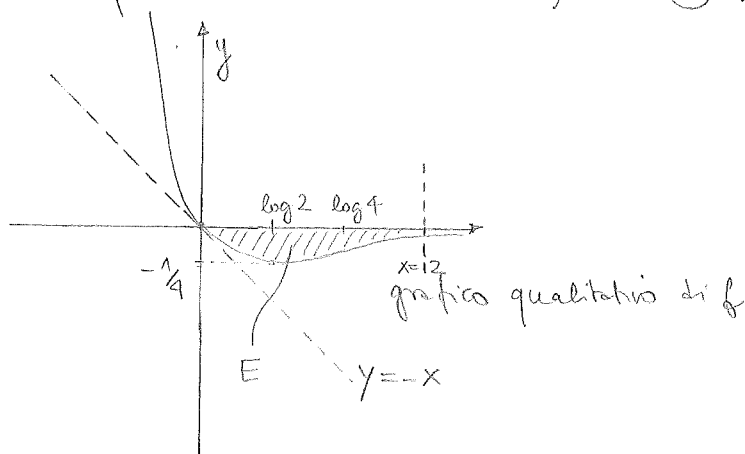
iii) Notiamo che $F(-4) = 0$. Inoltre F è crescente in $[-4, 1]$;

risulta quindi che $F(1) > 0$. $\square$

iv) Da $F'(x) = (1-x)e^{x^2}$, $x \in [-4, 4]$ segue $F''(x) = -e^{x^2} + (1-x)2xe^{x^2} = (-2x^2 + 2x - 1)e^{x^2}$.

Poiché $F''(x) < 0 \quad \forall x \in [-4, 4]$, possiamo concludere che F è concava in $[-4, 4]$. $\blacksquare$

5) Osserviamo che $f(x) = e^{-2x} - e^{-x}$ è uguale a $-(e^{-x} - e^{-2x})$, ossia meno la funzione studiata nell'es. 5) FLA(A). Quindi



ii) $y = -x$ è l'eq. della retta tg ricercata

$$\begin{aligned} \text{iii) } \text{area}(E) &= \int_0^{12} (0 - (e^{-2x} - e^{-x})) dx = \int_0^{12} (e^{-x} - e^{-2x}) dx = \\ &= \left[-e^{-x} + \frac{1}{2} e^{-2x} \right]_0^{12} = \left(-\frac{1}{e^{12}} + \frac{1}{2e^{24}} \right) - \left(-1 + \frac{1}{2} \right) \\ &= \underline{\underline{\frac{1}{2} - \frac{1}{e^{12}} + \frac{1}{2e^{24}}}} \end{aligned}$$

$$6) D_{12,6} = \frac{12!}{6!} = 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7$$