COGNOME ______________________

NOME ______________________

MATRICOLA |_|_|_|_|_|_|_|

NON SCRIVERE QUI

1	2	3	4	5	6

A

UNIVERSITÀ DI TRENTO — DIP. DI PSICOLOGIA E SCIENZE COGNITIVE

CDL IN SCIENZE E TECNICHE DI PSICOLOGIA COGNITIVA

ESAME SCRITTO DI ANALISI MATEMATICA

A.A. 2014-2015 — ROVERETO, 30 GENNAIO 2015

Riempite immediatamente questo foglio scrivendo in stampatello cognome, nome e numero di matricola. Scrivete cognome e nome (in stampatello) su ogni foglio a quadretti. Il tempo massimo per svolgere la prova è di **DUE ORE E MEZZA**.
Non potete uscire se non dopo avere consegnato il compito, al termine della prova.
È obbligatorio consegnare sia il testo, sia tutti i fogli ricevuti; al momento della consegna, inserite tutti gli altri fogli, compreso quello con il testo, dentro uno dei fogli a quadretti.
Potete usare solo il vostro materiale di scrittura e il vostro materiale di studio. Non usate il colore rosso.

1) i) Scrivete la negazione della seguente proposizione:

$$\mathcal{A} = \text{"}\forall x \in \mathbb{Q}\,, \exists n \in \mathbb{N} : nx \in \mathbb{Z}\text{"}\,.$$

Dite quale delle due proposizioni è vera e quale è falsa.

ii) Risolvete in $\mathbb{R}$ la seguente disequazione $\dfrac{2^{x^2-1}\cdot 4^x}{2^{-x+3}} \leq 1\,.$

2) i) Calcolate $\displaystyle\int_{-3}^{2} \big||x+2|-1\big|\,dx$ e $\displaystyle\lim_{x\to 0^-} \frac{e^{x^2}-1}{3x^4}\,.$

ii) Siano $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ due funzioni definite da $f(x) = e^x + x$ e $g(x) = x^2 + 1\,.$ Determinate $(f \circ g)'(2)\,.$

iii) Calcolate

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{4} \text{area}(C_n)\,,$ dove $C_n = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq \frac{1}{n^2}\}\,;$

b) $\displaystyle\sum_{j=1}^{8} (-1)^j f(j)\,,$ dove $f(x) = \begin{cases} 3x & \text{se } x < 3 \\ 1 & \text{se } x \geq 3\,. \end{cases}$

3) Siano $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ le funzioni definite da $f(x) = (x+1)|x-1|$ e $g(x) = -\dfrac{1}{x^2+1}\,.$

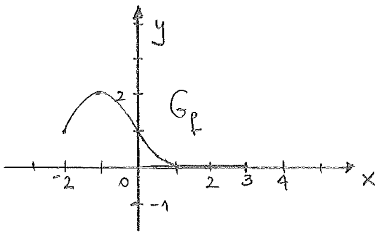
i) Rappresentate graficamente f e g.

ii) Determinate l'area della regione piana E delimitata dal grafico di f e dall'asse x.

iii) Determinate l'immagine di g. Calcolate $(fg)(0)$ e $(f \circ g)(1)$.

iv) Calcolate $\displaystyle\lim_{h\to 0^-} \frac{f(1+h)-f(1)}{h}$ e $\displaystyle\lim_{h\to 0^+} \frac{f(1+h)-f(1)}{h}$ e dite se f è derivabile in $x_0 = 1$.

4) Sia $f : [-2,3] \to \mathbb{R}$ la funzione rappresentata in figura



e sia $F : [-2,3] \to \mathbb{R}$ la funzione integrale di f definita da $F(x) = \int_{-2}^{x} f(t)\, dt$.

i) Determinate gli intervalli di monotonia di F.

ii) Provate che $3 < \max_{x\in[-2,3]} F(x) < 4$.

iii) Disegnate un grafico qualitativo della funzione F dopo aver individuato gli intervalli di convessità/concavità della funzione F.

---

5) i) Studiate (insieme di definizione, segno, comportamento agli estremi del dominio, asintoti, continuità, derivabilità, punti critici e monotonia, convessità/concavità) la funzione definita da

$$f(x) = \frac{\log(2x)}{|x|}$$

e rappresentatela graficamente nel piano cartesiano.

ii) Determinate l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto di coordinata $x_0 = \frac{1}{2}$.

---

6) i) Determinate $a \in \mathbb{R}$ tale che la funzione $f : [-3,2] \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} 2e^x & \text{se } -3 \le x < 0 \\ x^2 - 2x + 1 + a & \text{se } 0 \le x \le 2 \end{cases}$$

risulti continua su $\mathbb{R}$. Rappresentate poi graficamente tale funzione f.

ii) Fissato il valore $a \in \mathbb{R}$ determinato al punto i), determinate il massimo e il minimo (i punti di massimo e i punti di minimo) di f su $[-3,2]$.
