

Università di Trento - Dip. di Ingegneria e Scienza dell'Informazione
 CdL in Informatica - CdL in Ingegneria Elettronica e delle Telecomunicazioni
 CdL in Ingegneria dell'Informazione e Gestione d'Impresa
 ESAME SCRITTO DI ANALISI MATEMATICA 1
 a.a. 2014-2015 - Trento, 12 gennaio 2015

FILA (A)

1) $A = \left\{ \cos\left(\frac{n+1}{n^2+1}\right) : n \in \mathbb{N}, n \geq 1 \right\}$. Osserviamo che $a_n = \frac{n+1}{n^2+1}$, $n \geq 1$ è strett. decrescente. Infatti: n ha

$$\begin{aligned} a_{n+1} < a_n &\Leftrightarrow \frac{(n+1)+1}{(n+1)^2+1} < \frac{n+1}{n^2+1} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (n+2)(n^2+1) < (n+1)(n^2+2n+2) \\ &\Leftrightarrow \cancel{n^3} + 2n^2 + n + \cancel{2} < \cancel{n^3} + 3n^2 + 4n + \cancel{2} \\ &\Leftrightarrow 0 < n^2 + 3n \quad \forall n \geq 1. \end{aligned}$$

Inoltre $\cos x$ è una funzione strett. decrescente in $[0, \pi]$, e quindi in particolare in $[0, 1]$; dunque $\cos\left(\frac{n+1}{n^2+1}\right)$ è strett. crescente su $\mathbb{N}$, $n \geq 1$.
 Risulta che

$$\inf A = \min A = \cos a_1 = \cos 1 \quad \text{e} \quad \sup A = \lim_{n \rightarrow +\infty} \cos\left(\frac{n+1}{n^2+1}\right) = \cos 0 = 1.$$

Notiamo che $\nexists \max A$. ■

2) Notiamo che $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \int_0^x \log(2+t^2) dt}{\sin x^2}$ si presenta nella forma indeterminata $\left[\frac{0}{0}\right]$.

Oss. che $\frac{\left[x \int_0^x \log(2+t^2) dt\right]'}{[\sin x^2]'} = \frac{\int_0^x \log(2+t^2) dt + x \log(2+x^2)}{2x \cos x^2}$, dove al numera-

tore abbiamo applicato il teorema fondamentale del calcolo integrale (TFC).

Notiamo che

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \log(2+t^2) dt + x \log(2+x^2)}{2x \cos x^2}$$

si presenta ancora nella forma indeterminata $\left[\frac{0}{0}\right]$. Inoltre, applicando nuovamente il TFC si ha

$$\frac{\left[\int_0^x \log(2+t^2) dt + x \log(2+x^2)\right]'}{[2x \cos x^2]'} = \frac{2 \log(2+x^2) + x \cdot \frac{2x}{2+x^2}}{2 \cos x^2 - 4x^2 \sin x^2} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \log 2.$$

Applicando due volte il teorema di de l'Hôpital si può concludere che il limite cercato vale $\log 2$, ossia

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \int_0^x \log(2+t^2) dt}{\sin x^2} = \underline{\underline{\log 2.}}$$

3) $\int_0^1 \frac{e^{3x} - \cos 3x - \sin 3x - \alpha \log(1+x^2)}{x^3} dx :$

poniamo $f(x) = \frac{e^{3x} - \cos 3x - \sin 3x - \alpha \log(1+x^2)}{x^3}$, che è continua su $]0,1[$.

Studiamo il suo comportamento per $x \rightarrow 0^+$. Abbiamo

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\cancel{1} + \cancel{3x} + \frac{9x^2}{2} + \frac{\cancel{27x^3}}{6} + o(x^3) - \cancel{1} + \frac{9x^2}{2} + o(x^3) - \cancel{3x} + \frac{\cancel{27x^3}}{6} + o(x^3) - \alpha x^2 + o(x^3)}{x^3} \\ &= \frac{(9-\alpha)x^2 + 9x^3 + o(x^3)}{x^3} \end{aligned}$$

Risulta allora che $f(x) \sim \frac{9-\alpha}{x}$ se $9-\alpha \neq 0$; poiché $\int_0^1 \frac{1}{x} dx = +\infty$, l'integrale $\int_0^1 f(x) dx$ non è convergente per $\alpha \neq 9$ per il criterio del confronto asintotico.

Quindi l'integrale dato risulta convergente $\Leftrightarrow \underline{\underline{\alpha=9}}$ e può essere inteso come integrale di Riemann (definito per funzioni limitate su $]0,1[$).

Si osserva che $f(x) = \frac{e^{3x} - \cos 3x - \sin 3x - 9 \log(1+x^2)}{x^3}$ può essere definito su $[0,1]$ ponendo $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 9$.

4) $f(x) = \frac{\log(2|x|)}{x}$ i) • $\text{dom } f = \mathbb{R} \setminus \{0\} =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$.

• Simmetrie: il dominio di f è simmetrico rispetto all'origine e $f(-x) = f(x) \quad \forall x \in \text{dom } f$, ossia f è dispari.

Quindi basta studiare $f(x)$ per $x > 0$.

Per $x > 0$ $f(x) = \frac{\log(2x)}{x}$ • $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$ $x=0$ asintoto verticale (destro) per f .
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ $y=0$ asintoto orizzontale per f , per $x \rightarrow +\infty$.

• segno di f  $f(x)$

• $\text{dom } f' =]0, +\infty[$ $f'(x) = \frac{\frac{2}{2x} \cdot x^2 - \log(2x)}{x^2} = \frac{1 - \log(2x)}{x^2}$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \log(2x) = 1 \Leftrightarrow 2x = e \Leftrightarrow x = \frac{e}{2} \text{ pt. critico per } f$$

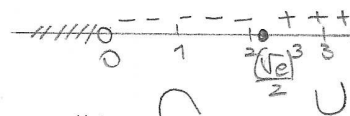
 $f'(x)$
 $f(x)$

$$x = \frac{e}{2} \text{ pt. di max. loc. stretto per } f \quad f\left(\frac{e}{2}\right) = \frac{\log\left(2 \cdot \frac{e}{2}\right)}{\frac{e}{2}} = \frac{2}{e}$$

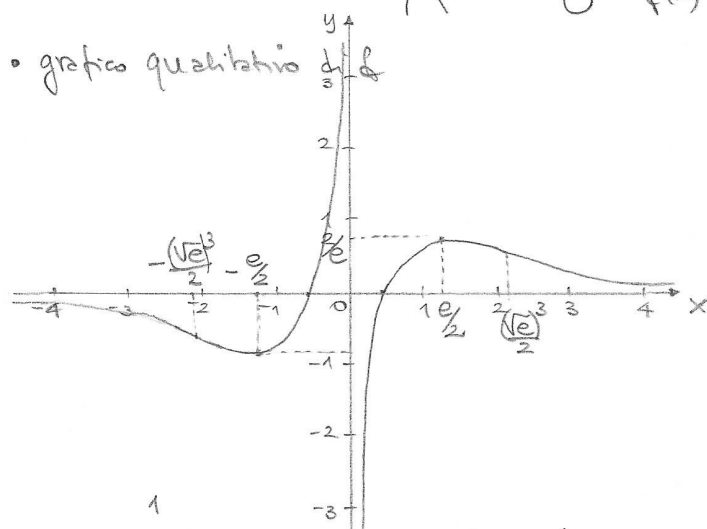
• $\text{dom } f'' =]0, +\infty[$ $f''(x) = \frac{-\frac{2}{2x} \cdot x^2 - (1 - \log(2x)) \cdot 2x}{x^4} = \frac{-1 - 2 + 2\log(2x)}{x^3} = \frac{-3 + 2\log(2x)}{x^3}$

$$= \frac{-1 - 2 + 2\log(2x)}{x^3} = \frac{-3 + 2\log(2x)}{x^3}$$

Abbiamo $-3 + 2\log(2x) = 0 \Leftrightarrow \log(2x) = \frac{3}{2} \quad x = \frac{(\sqrt{e})^3}{2} \sim 2.2$
 pt. di flesso per f

 $f''(x)$
 $f(x)$

• grafico qualitativo di f



$$\text{ii) } \int_{\frac{1}{2}}^1 f(x) dx = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\log(2x)}{x} dx = \left[\frac{1}{2} \log^2(2x) \right]_{\frac{1}{2}}^1 = \frac{1}{2} \log^2 2.$$

5) Per studiare la convergenza assoluta della serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cosh(n\pi)}{\sqrt{n^{\beta}}}$, dobbiamo studiare la convergenza della serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\cos(n\pi)|}{n^{\beta/2}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|(-1)^n|}{n^{\beta/2}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\beta/2}}$. Quest'ultima serie è la serie armonica generalizzata che è convergente se e solo se $\frac{\beta}{2} > 1$, ossia $\beta > 2$.

6) $y'' + y' + y = e^{-x}$: è un'eq. diff. lineare del 2° ordine a coeff. costanti non-omogenea.

L'eq. caratteristica associata all'eq. diff. omogenea è data da $z^2 + z + 1 = 0$; le soluzioni sono $z_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$. Quindi, la soluzione generale (o integrale generale) dell'eq. diff. omogenea $y'' + y' + y = 0$ è data da

$$y(x) = c_1 e^{-\frac{1}{2}x} \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x + c_2 e^{-\frac{1}{2}x} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}x \quad \text{al variare di } c_1, c_2 \in \mathbb{R} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Cerchiamo una soluzione particolare dell'eq. diff. non-omogenea del tipo

$\bar{y}(x) = a e^{-x}$ con a da determinare. Risulta $\bar{y}''(x) + \bar{y}'(x) + \bar{y}(x) = e^{-x} \Leftrightarrow a e^{-x} = e^{-x}$, ossia $a = 1$. La soluzione generale dell'eq. diff. data è quindi

$$\underline{\underline{y(x) = c_1 e^{-\frac{1}{2}x} \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x + c_2 e^{-\frac{1}{2}x} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}x + e^{-x} \quad \text{al variare di } c_1, c_2 \in \mathbb{R} \quad x \in \mathbb{R}.}}$$



7) i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists K > 0 : |f(x) - 3| < \varepsilon \quad \forall x > K$;

(analog. $\forall$ intorno U di 3 $\exists$ un intorno V di $+\infty$ tale che $f(x) \in U \quad \forall x \in V$). □

ii) Formula del prodotto di due nr. complessi in forma trigonometrica. □

FILA (B)

- 1) $A = \{ \arctg \left(\frac{n^2+1}{n+1} \right) : n \in \mathbb{N}, n \geq 1 \}$. Osserviamo che $a_n = \frac{n^2+1}{n+1}$, $n \geq 1$ è strett. crescente. Infatti si ha

$$\begin{aligned} a_{n+1} > a_n &\Leftrightarrow \frac{(n+1)^2+1}{(n+1)+1} > \frac{n^2+1}{n+1} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (n^2+2n+2)(n+1) > (n^2+1)(n+2) \\ &\Leftrightarrow \cancel{n^3} + 3n^2 + 4n + 2 > \cancel{n^3} + 2n^2 + n + \cancel{2} \\ &\Leftrightarrow n^2 + 3n > 0 \quad \forall n \geq 1. \end{aligned}$$

Inoltre $\arctg x$ è una funzione strett. crescente su $\mathbb{R}$; dunque $\arctg \left(\frac{n^2+1}{n+1} \right)$ è strett. crescente su $\mathbb{N}$, $n \geq 1$. Risultato che

$$\inf A = \min A = \arctg a_1 = \arctg 1 = \frac{\pi}{4} \quad \text{e} \quad \sup A = \lim_{n \rightarrow +\infty} \arctg \left(\frac{n^2+1}{n+1} \right) = \frac{\pi}{2}.$$

Notiamo che $\nexists \max A$. ■

- 2) Notiamo che $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \int_0^x e^{t^2+1} dt}{1 - \cos 2x}$ si presenta nella forma indeterminata $\left[\frac{0}{0} \right]$.

Oss. che $\frac{\left[x \int_0^x e^{t^2+1} dt \right]'}{[1 - \cos 2x]'} = \frac{\int_0^x e^{t^2+1} dt + x e^{x^2+1}}{2 \sin 2x}$, dove al numeratore abbiamo

applicato il teorema fondamentale del calcolo integrale [TFC]. Notiamo che

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x e^{t^2+1} dt + x e^{x^2+1}}{2 \sin 2x} \quad \text{si presenta ancora nella forma indeterminata} \left[\frac{0}{0} \right].$$

Inoltre, applicando nuovamente il TFC si ha

$$\frac{\left[\int_0^x e^{t^2+1} dt + x e^{x^2+1} \right]'}{[2 \sin 2x]'} = \frac{2e^{x^2+1} + 2x^2 e^{x^2+1}}{4 \cos 2x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{e}{2}.$$

Applicando due volte il teorema di de l'Hôpital si può concludere che il limite ricercato vale $\frac{e}{2}$, ossia

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \int_0^x e^{t^2+1} dt}{1 - \cos 2x} = \underline{\underline{\frac{e}{2}}}.$$
■

$$3) \int_0^1 \frac{e^{2x} - \cos 2x - 2 \log(1+x) - \alpha \sin x^2}{x^3} dx :$$

Poniamo $f(x) = \frac{e^{2x} - \cos 2x - 2 \log(1+x) - \alpha \sin x^2}{x^3}$, che è continua in $]0,1[$.

Studiamo il suo comportamento per $x \rightarrow 0^+$. Abbiamo

$$f(x) = \frac{\cancel{1} + \cancel{2x} + \frac{2}{2}x^2 + \frac{4}{6}x^3 + o(x^3) - \cancel{1} + \frac{2}{2}x^2 + o(x^3) - \cancel{2x} + x^2 - \frac{2x^3}{3} + o(x^3) - \alpha x^2 + o(x^3)}{x^3}$$

$$= \frac{(5-\alpha)x^2 + \frac{2}{3}x^3 + o(x^3)}{x^3}.$$

Risulta allora che $f(x) \sim \frac{5-\alpha}{x}$ se $5-\alpha \neq 0$; poiché $\int_0^1 \frac{1}{x} dx = +\infty$, l'integrale $\int_0^1 f(x) dx$ non è convergente per $\alpha \neq 5$ per il criterio del confronto asintotico.

Quindi l'integrale dato risulta convergente $\Leftrightarrow \underline{\alpha=5}$ e può essere intero

come integrale di Riemann (definito per funzioni limitate su $]0,1[$). Si osserva che

$f(x) = \frac{e^{2x} - \cos 2x - 2 \log(1+x) - 5 \sin x^2}{x^3}$ può essere definito in $[0,1]$ ponendo

$$f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \frac{2}{3}.$$

$$4) \boxed{f(x) = -\frac{\log(4|x|)}{x}}$$

• $\text{dom } f = \mathbb{R} \setminus \{0\} =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$.

• simmetrie: il dominio di f è simmetrico rispetto all'origine e $f(-x) = -f(x) \quad \forall x \in \text{dom } f$, ossia f è dispari.

Quindi basta studiare $f(x)$ per $x > 0$.

Per $\boxed{x > 0}$ $f(x) = -\frac{\log(4x)}{x}$ • $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$ $x=0$ asintoto verticale (destro) per f

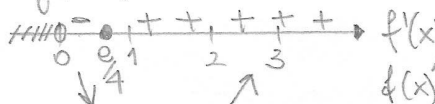
$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ $y=0$ asintoto orizzontale per f , per $x \rightarrow +\infty$.

• segno di f



• $\text{dom } f' =]0, +\infty[$ $f'(x) = -\frac{\frac{4}{4x} \cdot x - \log(4x)}{x^2} = -\frac{1 - \log(4x)}{x^2}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \log(4x) = 1 \Leftrightarrow 4x = e \quad x = \frac{e}{4}$ pt. antico per f
 $\approx 0,7$



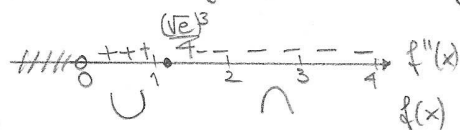
$x = \frac{e}{4}$ pt. di minimo loc. diretto per f .

$$f\left(\frac{e}{4}\right) = \frac{-\log\left(4 \cdot \frac{e}{4}\right)}{\frac{e}{4}} = -\frac{4}{e} \sim -1.5.$$

• $\text{dom } f'' =]0, +\infty[$ $f''(x) = -\frac{\frac{4}{4x} \cdot x^2 - (1 - \log(4x)) \cdot 2x}{x^3}$

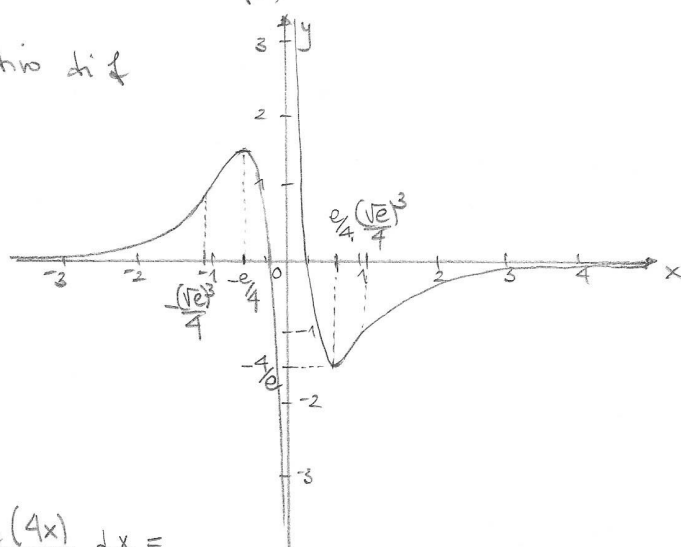
$$= -\frac{-1 - 2 + 2\log(4x)}{x^3} = \frac{3 - 2\log(4x)}{x^3}.$$

Abbiamo $3 - 2\log(4x) = 0 \Leftrightarrow \log(4x) = \frac{3}{2} \Leftrightarrow 4x = e^{\frac{3}{2}} \Rightarrow x = \frac{(\sqrt{e})^3}{4} \sim 1.1$



pt. di flesso

• grafico qualitativo di f



$$\begin{aligned} \text{ii) } \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} f(x) dx &= -\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} \frac{\log(4x)}{x} dx = \\ &= -\frac{1}{2} \left[\log^2(4x) \right]_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2} \log^2 2. \end{aligned}$$

5) Per studiare la convergenza assoluta della serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)}{\sqrt[3]{n^{\beta}}}$, dobbiamo studiare la convergenza della serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\cos(n\pi)|}{\sqrt[3]{n^{\beta}}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^{\beta}}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\beta/3}}$.

Quest'ultima serie è la serie armonica generalizzata che è convergente se e solo se $\frac{\beta}{3} > 1$, ossia $\beta > 3$.

6) $y'' - y' + \frac{9}{4}y = e^x$: è un'eq. diff. lineare del 2° ordine a coeff. costanti non-omogenea.

L'eq. caratteristica associata all'eq. diff. omogenea è data da $z^2 - z + \frac{9}{4} = 0$.

Le soluzioni sono $z_{1/2} = \frac{1 \pm \sqrt{1-9}}{2} = \frac{1 \pm 2\sqrt{-2}}{2}$. Quindi la soluzione generale (o integrale generale) dell'eq. diff. omogenea $y'' - y' + \frac{9}{4}y = 0$ è data da

$$y(x) = c_1 e^{\frac{1}{2}x} \cos \sqrt{2}x + c_2 e^{\frac{1}{2}x} \sin \sqrt{2}x \quad \text{al variare di } c_1, c_2 \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}.$$

Cerchiamo una soluzione particolare dell'eq. diff. non-omogenea del tipo

$$\bar{y}(x) = a e^x \quad \text{con } a \text{ da determinare. Rimetta } \bar{y}'' - \bar{y}' + \frac{9}{4}\bar{y} = e^x \Leftrightarrow \frac{9}{4}a e^x = e^x$$

$\Leftrightarrow a = \frac{4}{9}$. La soluzione generale dell'eq. diff. data è quindi

$$\underline{y(x) = c_1 e^{\frac{1}{2}x} \cos \sqrt{2}x + c_2 e^{\frac{1}{2}x} \sin \sqrt{2}x + \frac{4}{9}e^x} \quad \text{al variare di } c_1, c_2 \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}.$$

7) i) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists K < 0 : |f(x) - 2| < \varepsilon \quad \forall x < K;$ ■

(analog. $\forall$ intorno U di 2 $\exists$ un intorno V di $-\infty$ tale che

$$f(x) \in U \quad \forall x \in V).$$
 □

ii) L'eq. $x^2 = 2$ non ha soluzioni in $\mathbb{Q}$. ■