Diario del Corso di Analisi Matematica 1 - a.a. 2014/15

15/09/14 (2 ore): Introduzione al corso: orario, esercitazioni, ricevimento studenti, sito web, tempi e modalità delle prove di valutazione (compitini in itinere, prova finale).
Proposizioni. Esempi. Connettivi logici (non, **e**, **o**, implicazione, doppia implicazione) e la loro tavola di verità. Proposizioni equivalenti. Proprietà di '**e**' ed '**o**' (commutativa, associativa, distributiva). La negazione ed '**e**'; la negazione ed '**o**'. La negazione e l'implicazione. Predicati. Esempi. Predicati con più variabili. Esempi. Quantificatori (per ogni; esiste). Esempi. Quantificatori e predicati con più variabili. Negazione di una proposizione contenente quantificatori. Esercizi.

16/09/14 (2 ore): Tautologia. Modus Ponens. Sua applicazione nelle dimostrazioni di teoremi.
Terminologia sugli insiemi (enumerazione; mediante predicati). Simbolo di appartiene ($\in$) e di non appartiene ($\notin$). Esempi. Insiemi numerici: **N**, **Z**, **Q**, **R**. Proposizioni con quantificatori. Insieme vuoto.
Sottoinsiemi. Uguaglianza di insiemi. Gli intervalli limitati (chiusi, aperti,...), gli intervalli illimitati. Esempi.
Unione, intersezione, differenza di insiemi, complementare (diagrammi di Venn). Gli insiemi $\mathbf{R}^+$, $\mathbf{R}^-$. Esercizi di insiemistica (unione, intersezione, differenza di insiemi). Proprietà distributiva delle operazioni di unione ed intersezione. Leggi di de Morgan (complementare ed unione, complementare ed intersezione).
Insieme delle parti di un insieme. Esempi.
Prodotto cartesiano di due insiemi. Esempi. Il prodotto cartesiano **RxR.**

18/09/14 (2 ore): Algebra elementare dei numeri razionali (l'addizione e la moltiplicazione).
Alcuni corollari. La legge di annullamento del prodotto (commento sulla sua applicazione).
La relazione $\leq$ (ordinamento totale) e la compatibilità dell'ordine con le operazioni di somma e prodotto (commento sulle loro applicazioni).
Proprietà di densità. *Proprietà di Archimede* e dei corollari.
Teorema: L'equazione $x^2 = 2$ non ha una soluzione in **Q** (ossia la radice di 2 non è un numero razionale).
Rappresentazione geometrica di **Q**: la retta euclidea ha dei 'buchi'!
Rappresentazione decimale dei numeri razionali (allineamenti decimali). Definizione di numero reale. Definizione di numero irrazionale. Approssimazione di radice di due con un allineamento decimale.
Proprietà dei numeri reali (rispetto l'addizione, la moltiplicazione, l'ordinamento); vale ancora la proprietà archimedea, e la proprietà di densità (sia dei razionali che degli irrazionali). Esercizio: qualche disuguaglianza, disequazione, equazione.
Il valore assoluto: definizione e prime proprietà.

19/09/14 (2 ore): Disuguaglianza triangolare. Disequazioni con il valore assoluto.
Maggiorante e minorante di un insieme numerico. Insiemi numerici limitati (limitati inferiormente, limitati superiormente). Esempi.
Massimo e minimo di un insieme numerico. Unicità del massimo (minimo), se esiste. Esempi.
Estremo superiore e estremo inferiore di un insieme numerico. Confronto con il massimo e il minimo. Esempi.

Caratterizzazione dell'estremo superiore/estremo inferiore. Esempi.
Teorema (*Completezza di* **R**): Esistenza dell'estremo superiore (estremo inferiore) in **R** per sottoinsieme superiormente limitati (inferiormente limitati).
R e la sua rappresentazione geometrica mediante la retta reale. **RxR** e la sua rappresentazione geometrica mediante il piano cartesiano (asse delle ascisse, asse delle ordinate).

22/09/14 (2 ore): Rappresentazione di sottoinsiemi di **RxR** nel piano cartesiano. Qualche esempio.
a) Potenze ad esponente intero positivo o nullo (proprietà e rappresentazione grafica delle coppie (x,x^m) nel piano cartesiano).
b) Potenze ad esponente intero negativo (proprietà e rappresentazione grafica delle coppie (x,x^m) nel piano cartesiano).
Teorema di esistenza della radice n-esima di un numero reale non negativo. (Cenno della dimostrazione). La radice n-esima di un numero negativo, se n è dispari. Segue da questo teorema la definizione di:
c) Potenze ad esponente frazionario (proprietà e rappresentazione grafica delle coppie $(x,x^{1/n})$ nel piano cartesiano).
d) Potenze ad esponente razionale (per poter dare una buona definizione ci si deve restringere ad una base strettamente positiva!). Proprietà delle potenze.
e) Potenze ad esponente reale e base $a > 0$ fissata (proprietà e rappresentazione grafica delle coppie (x, a^x) nel piano cartesiano). Esercizi (risoluzione di equazioni e disequazioni). Numero di Nepero **e**.
Teorema di esistenza del logaritmo in base a di un numero positivo (rappresentazione grafica delle coppie $(x,\log_a x)$ nel piano cartesiano). Notazione: $\log_e x$ sarà sempre denotato con $\log x$. Calcolo di qualche logaritmo.

23/09/14 (2 ore): **Esercitazione**: Disequazioni con potenze, radici, esponenziali e logaritmi.
Estremo superiore/estremo inferiore di sottoinsiemi di **R**.

25/09/14 (2 ore): Proprietà dei logaritmi. Esercizi.
Numeri complessi: forma algebrica. Parte reale e parte immaginaria. L'addizione e la moltiplicazione in **C** (la sottrazione e la divisione). Esempi. Rappresentazione nel piano complesso (piano di Gauss). Risoluzione di equazioni. Coniugato, modulo e la loro interpretazione geometrica. Esercizio.

26/09/14 (2 ore): Argomento. Forma trigonometrica di un numero complesso (del suo coniugato, del suo reciproco). Dalla forma algebrica alla forma trigonometrica e viceversa. Esempi. Interpretazione geometrica della moltiplicazione (divisione) di due numeri complessi. *Potenza n-esima di un numero complesso*. Esempi. *Radici n-esime di un numero complesso*. Esempio. Forma esponenziale di un numero complesso. Risoluzione di equazioni di secondo grado. Esercizi vari.

29/09/14 (2 ore): Ancora qualche osservazione su esercizi in **C**. Teorema fondamentale dell'algebra.
Principio di induzione. Es. Disuguaglianza di Bernoulli; somma dei primi n numeri naturali; la somma geometrica; n-fattoriale: definizione e l'assegnazione che $n! \geq 2^{n-1}$ per ogni $n\in\mathbf{N}$.
Funzioni: esempi. Dominio, codominio, legge. Scrittura. Rappresentazione grafica di funzione e non. Dominio naturale (insieme di definizione).
Funzioni costanti, l'identità, la restrizione, le proiezioni canoniche di X×Y su X (su Y). Immagine di una funzione. Rappresentazione grafica. Grafico di una funzione. Esempio.

30/09/14 (2 ore): **Esercitazione**: Estremo superiore/estremo inferiore. Numeri complessi. Principio di induzione.

02/10/14 (2 ore): Ancora qualche commento sull'immagine/sul grafico di funzioni. Esempi. Dominio naturale: esempi.
Funzioni reali di variabile reale:
Funzioni monotone. Funzione crescente (strettamente crescente)/ decrescente (strettamente decrescente). Esempi. Intervalli di monotonia. Funzione parte intera, di Heaviside, segno. Funzioni definite a tratti.
Funzioni simmetriche. Insieme simmetrico (rispetto all'origine). Funzione pari/dispari. Rappresentazione grafica. Esempi.
Funzioni periodiche. Funzione periodica di periodo T (oppure T-periodica). Intervallo di periodicità. Funzione mantissa. Funzioni trigonometriche: coseno, seno.

03/10/14 (2 ore): Funzione tangente. Grafici delle funzioni elementari (dominio, immagine, monotonia, simmetria).
Funzioni limitate. *Estremi di una funzione*. Funzione limitata superiormente/inferiormente/limitata. Rappresentazione grafica. Esempi. Funzione positiva (non-negativa). Funzione negativa (non-positiva).
Estremo superiore/estremo superiore di una funzione. Esempi. Caratterizzazione. Successione a valori reali. Termine di una successione. Estremo inferiore e superiore di $a_n= (n-1)/(n+1)$.
Massimo (globale/assoluto) di una funzione. Punto di massimo. Minimo (globale/assoluto) di una funzione. Punto di minimo. Unicità degli estremi (massimo/minimo), se esistono. Esempi.

06/10/14 (2 ore): *Funzione composta*. Esempi. Dominio naturale di funzioni ottenute mediante composizione di funzioni elementari. Monotonia della funzione composta a partire dalla monotonia delle funzioni di partenza.
Funzione iniettiva/suriettiva/biiettiva. Esempi. *La funzione inversa*. Grafico della funzione inversa. Esempi.

07/10/14 (2 ore): **Esercitazione**: Dal grafico di f al grafico di f(x)±a, di f(x±a), di af(x), di f(ax) (traslazioni lungo l'asse y, lungo l'asse x, riscalamenti della variabile dipendente, riscalamenti della variabile indipendente);
dal grafico di f al grafico di |f| (con discussione su monotonia – simmetria – periodicità – limitatezza – sup/inf – max/min).

09/10/14 (2 ore): Funzioni trigonometriche inverse (arcoseno, arcocoseno, arcotangente). Disequazioni con le funzioni trigonometriche inverse.
Stretta monotonia e invertibilità di una funzione.
Operando con le funzioni:
a) funzione somma (differenza), funzione prodoto, funzione quoziente;
b) composizione di funzioni (esempi: |f|, f_+, f_-)
c) Funzioni inverse
d) Funzioni definite a tratti.
Equazioni e disequazioni: risoluzione con il metodo grafico. Determinare, al variare di $k \in \mathbf{R}$, il numero delle soluzioni di un'equazione del tipo f(x)=k.
Rappresentazione grafica di $y=ax^2+bx +c$.

Proprietà locali di una funzione. La distanza euclidea in **R**; intorno (sferico) di un punto di R. Insieme degli intorni. *Punto di minimo/massimo locale* (relativo) di una funzione. Punto di minimo/massimo locale stretto o forte.
Esempio: lettura dei punti estremi (globali e locali) da un grafico.

10/10/14 (2 ore): Esercizi: ricerca di punti di massimo/minimo locale leggendo il grafico.
Introduzione al concetto di limite mediante esempi:
i) limite di una successione a_n per n tendente a $+\infty$. Successione crescente.
ii) limiti per una funzione reale definita su $\mathbf{R}\setminus\{2\}$ e rappresentata graficamente.
La retta reale estesa. Intorno di $-\infty$ e di $+\infty$. Punto di accumulazione. Punto isolato. Esempi. Esercizi.
Definizione (unificata) di limite di una funzione.

13/10/14 (2 ore): Commenti sulla definizione (unificata) di limite di una funzione. Limite finito. Casi particolare: $x_0 \in \mathbf{R}$ e $l \in \mathbf{R}$; $x_0=+\infty$ e $l \in \mathbf{R}$. Calcolo di limiti usando la definizione. Unicità del limite, se esiste. Esistenza del limite finito implica la locale limitatezza della funzione. Teorema della permanenza del segno.
Esempi di non esistenza del limite (funzioni oscillanti!).
Punto di accumulazione sinistro (destro). Intorno sinistro (destro). Limite sinistro (destro). Caratterizzazione del limite mediante il limite sinistro e limite destro. Esempio di non esistenza del limite (caso in cui il limite destro e il limite sinistro esistono ma non coincidono).
Algebra dei limiti (per limiti finiti). Applicazioni.

16/10/14 (2 ore): Esempio di non esistenza del limite destro. Dimostrazione del limite del prodotto. *Teorema del confronto (dei due carabinieri)*. Esempi. Parziale estensione dell'algebra dei limiti con limiti infiniti o nulli. Esempi. Forme indeterminate ($+\infty - \infty$; $0(+\infty)$, ∞/∞, $0/0$). Esempi. *Teorema di esistenza del limite destro (sinistro) di funzioni monotone*. Esistenza del limite o non. Funzione continua in un punto. Funzione continua. Caratterizzazione della continuità con con ε e δ. Continuità da destra e continuità da sinistra. Continuità di una funzione definita a tratti. Esempi.

17/10/14 (2 ore): Continuità delle funzioni potenze, esponenziali, logaritmiche, trigonometriche e trigonometriche inverse. Limite della funzione composta. La funzione composta di funzioni continue è continua. Esempi. Limite di $f(x)^{g(x)}$, per f(x) positiva in un intorno di x_0. Forme indeterminate 0^0, 1^∞, ∞^0.
Limiti notevoli delle funzioni trigonometriche. Esempi. Funzione divergente (o infinita). Funzione infinitesima. *Infiniti e confronti* (logaritmi, potenze ed esponenziali al confronti). Dimostrazione che $x/4^x$ tende a 0 per x tendente a $+\infty$.

17/10/14 (2 ore): **Esercitazione**: Limiti
- usando l'algebra dei limiti e sua estensione, mediante il teorema del confronto;
- di forme indeterminate e strategie per "uscire dalla forma indeterminata";
- di funzioni composte e usando i limiti notevoli delle funzioni trigonometriche.

20/10/14 (2 ore): Dimostrazione della gerarchia degli infiniti ($\log_b x$, x^β, a^x per x tendente a $+\infty$). Corollari. Esercizi.
Confronto di infiniti. *Infinito di ordine superiore (inferiore). Infinito dello stesso ordine ed infiniti non confrontabili. Funzioni asintotiche*. Esercizi.
Funzione infinitesima e il simbolo o(1). Esempi. "Regole di calcolo" per o(1).

21/10/14 (2 ore): **Esercitazione**: Limite di alcune successioni ($\log_b n$, n^β, a^n, $n!$, n^n per n tendente a $+\infty$). Limite di $n^{1/n}$. La successione $(1+1/n)^n$ è crescente e limitata; il suo limite è definito uguale a "e". Alcuni limiti legati ad e. Limiti notevoli: $(e^x-1)/x$ tende a 1 per x tendente a 0; $[\log(1+x)]/x$ tende a 1 per x tendente a 0.

23/10/14 (2 ore): Uso di o(1) per il calcolo di limiti.
Confronto di infinitesimi. *Infinitesimo di ordine superiore (inferiore). Infinitesimo dello stesso ordine ed infinitesimi non confrontabili. Funzioni asintotiche*. Esempi ($\sin x$, e^x-1, $\log(1+x)$ sono tutte funzioni asintotiche a x, per x tendente a 0). Stime asintotiche e grafici. Esercizi.
La notazione $f(x)=o(g(x))$ per x tendente a x_0. Significato di $f(x)=o(g(x))$, per x tendente a x_0, se entrambe le funzioni sono infinite (o entrambe sono infinitesime). Esempi.
"Regole di calcolo" per $o(x^\alpha)$. L'uso di questo linguaggio nel calcolo di limiti.
Ordine di infinitesimo e infinito.

24/10/14 (2 ore): Limiti. Esercizi. Esempi di ordini di infinitesimo e infinito. Non sempre è possibile definire l'ordine rispetto alle funzioni campioni usuali: a^x non ha ordine d'infinito rispetto all'infinito x, per x che tende a $+\infty$.
Asintoti: verticali, orizzontali ed obliqui. Esempi.
Limiti di funzioni e limiti di successioni (teorema ponte). Non esistenza del limite. Esempi.
Ripasso della continuità: definizione; esempi di funzioni continue; somma/differenza, prodotto, reciproco di funzioni continue; permanenza del segno; continuità della funzione composta; continuità di funzioni definite a tratti.
Punti di discontinuità. Punti di discontinuità di una funzione monotona definita su un intervallo. *Teorema di esistenza degli zeri* (enunciato). Cosa succede se viene a mancare una delle sue ipotesi? Applicazione del teorema per la risoluzione di un'equazione del tipo $f(x)=g(x)$.

27/10/14 (2 ore): Dim. Del teorema di esistenza degli zeri. Metodo di bisezione.
Corollario: se due funzioni continue f e g su [a,b] verificano $f(a)>g(a)$ e $f(b)<g(b)$ (o viceversa), allora esiste x_0 in]a,b[tale che $f(x_0)=g(x_0)$.
Teorema dei valori intermedi. Corollario: L'immagine di un intervallo tramite una funzione continua è ancora un intervallo.
Monotonia e invertibilità: f continua e iniettiva su un intervallo I implica f strettamente monotona su I.
Continuità della funzione inversa di una funzione continua e iniettiva su un intervallo.
Teorema di Weierstrass: esistenza del massimo e del minimo di una funzione continua su un intervallo chiuso e limitato [a,b].
Cosa succede se le ipotesi su f e su [a,b] vengono a mancare? A priori non si può dire nulla sull'esistenza di min e max: possono esserci massimo/minimo come possono anche non esserci. Esempi. Commento breve su dove possono 'cadere' eventuali punti di massimo/punti di minimo.

28/10/14 (2 ore): **Esercitazione:** Limiti notevoli. Limiti di successioni. Limiti con confronto di velocità. Continuità di funzioni definite a tratti. Risoluzione di equazioni usando il metodo di bisezione.

31/10/14 (2 ore): PRIMA PROVA INTERMEDIA

03/11/14 (2 ore): *Funzione differenziabile* in un punto. Retta tangente. Esempi. Rapporto incrementale. *Derivata di una funzione in un punto*. Derivata destra e derivata sinistra di una funzione in un punto. Funzione derivabile in un punto. Funzione derivabile in un insieme. La funzione derivata.
Teorema del differenziale. Interpretazione geometrica della derivata e pendenza della *retta tangente al grafico di una funzione derivabile*.
Derivata di alcune funzioni elementari (potenze, esponenziale, logaritmo, seno, coseno). Esercizi: calcolo della retta tangente al grafico di una funzione.
Teorema: *Se f è derivabile in un punto, è continua nel punto*.
Non vale il viceversa: |x| è continua in x=0, ma non derivabile in x=0.
Funzioni di classe $C^1(X)$.
Punti di non derivabilità: punto angoloso, cuspide. Punto con tangente verticale.
Esempi grafici. *Algebra delle derivate*.

04/11/14 (2 ore): **Esercitazione:** Legame tra monotonia, limitatezza, continuità e derivabilità di una funzione f definita su [a,b]. Derivata di log|x|, x^{α}. Derivata n-esima di 1/(a+bx) (dim. della formula per induzione). Derivabilità di x|x|. Derivabilità della funzione f(x) definita da x^2sen (1/x) per x diverso da 0 e 0 per x=0. Vari esercizi sulla derivabilità di funzioni. Studio della derivabilità della funzione radice quadrata di |x| in 0 (cuspide). Derivata della funzione composta (dim.) e derivata di a^x. Derivata di tan x. Derivata della funzione inversa. Derivata di arcsin x. Studio della derivabilità di f(x)= $e^{|x^2-3x+2|}/x$, utilizzando il seguente
Teorema (limite della derivata): Se f è continua in x_0 ed f è derivabile in ogni x diverso da x_0 (analog. derivabile da destra, da sinistra), se $\lim_{x\to x_0} f'(x)= l$ (finito), allora f è derivabile in x_0 e $f'(x_0)=l$.
Può succedere che $\lim_{x\to x_0} f'(x)$ non esista, ma che la funzione f sia derivabile in x_0. Esempio: f(x) definita da x^2sen (1/x) per x diverso da 0 e 0 per x=0.

06/11/14 (2 ore): Ripasso sulla derivabilità di x^n, e^x, sin x, cos x su **R**. Derivabilità di x^{-n} su **R**\{0}, derivabilità della funzione radice quadrata di x su]0, +∞[, derivabilità di x^{α} su]0, +∞[, di log|x| su **R**\{0}.
Algebra delle derivate: dim. della derivata del prodotto.
Qualche esercizio di calcolo di derivate usando l'algebra delle derivate e la derivata delle funzioni elementari.
Determinazione dell'equazione della retta tangente al grafico di log x e di e^x in qualche punto del grafico.
Derivata della tangente (come derivata del rapporto).
Qualche esercizio sulla derivabilità di una funzione definita a tratti o con la presenza del valore assoluto.
Teorema: derivata della funzione composta. Qualche esercizio di calcolo.
Teorema: derivata della funzione inversa. Derivata della funzione arcsinx, arccosx, arctgx.
Commento al caso in cui $f'(x_0)= +\infty$ ($+\infty$) oppure $f'(x_0)=0$.
Es. Calcolo della derivata della funzione inversa in un punto di una funzione strettamente crescente e derivabile in **R** senza la determinazione analitica della funzione inversa.
Lemma: se $f'(x_0)$ è diverso da 0, allora $f(x)-f(x_0)$ cambia segno attraversando x_0.
Estremi locali e derivate: *Teorema di Fermat* (dim.)
Punto critico (o stazionario) di una funzione.

07/11/14 (2 ore): I punti estremi (max/min) locali di una funzione continua $f:[a,b] \longrightarrow R$ sono da ricercare tra i punti critici, tra gli estremi dell'intervallo e tra punti di non derivabilità di f.
Teorema del valor medio o di Lagrange. Interpretazione geometrica.
Teorema di Rolle. Dim. del teorema di Rolle e poi la dim. del teorema di Lagrange. Controesempi al teorema di Rolle. *Teorema di Cauchy* (dim).
Conseguenze del teorema di Lagrange:
a) se $f'(x)=0$ per ogni x dell'intervallo I, allora f è costante in I.
L'importanza che I sia un intervallo.
Applicazione: $\arctan x + \arctan (1/x) = \pi/2$ per ogni x in $]0,+\infty[$.
b) Test di monotonia: segno di f' in]a,b[e la monotonia di f in]a,b[.
L'importanza che I sia un intervallo.
Studio della natura dei punti critici di una funzione usando il segno della derivata nell'intorno dei punti critici.
Studio della funzione $f(x)=x^2-x^4$ su **R**; massimi e minimi di f su [-3,4].

10/11/14 (2 ore): Determinare punti di min/max assoluti di $f(x)=|x^2-1|$ su [-1,2]. Studio qualitativo della funzione $f(x)=xe^{-x^2}$. Determinare al variare di k in **R**, il numero delle soluzioni dell'equazione $e^x-x=k$.
Forme indeterminate e il Teorema di de l'Hopital (dim. caso 0/0).
Esercizi vari (bisogna usare con oculatezza il teorema di de l'Hopital).
La non-esistenza del limite di $f'(x)/g'(x)$ non implica la non-esistenza del limite di $f(x)/g(x)$. Conseguenza utile del teorema di de l'Hopital:
Teorema: Sia f continua in [a,b] e derivabile in]a,b[. Se esiste $\lim_{x\to a^+} f'(x)$ in **R** (eventualmente anche $-\infty$ oppure $+\infty$) allora $f'_+(a)= \lim_{x\to a^+} f'(x)$.
Corollario (vedi Esercitazione 04/11): Sia f continua in un intorno di x_0 e anche derivabile per gli x diverso da x_0. Se $\lim_{x\to x_0} f'(x)= l$ (finito), allora f è derivabile in x_0 e $f'(x_0)=l$.
Es: studiare la derivabilità della funzione $f(x)= \sin^3$(radice di x) in $[0,+\infty[$.

11/11/14 (2 ore): **Esercitazione:** Limiti con de l'Hopital. Studio della continuità/derivabilità di una funzione definita a tratti (con parametri). Studio di funzione.

13/11/14 (2 ore): Oss: Nel Corollario visto nella Lez. 10/11 la continuità è essenziale.
Studio della derivabilità di $f(x)= (\text{sen } x)/x$ per x diverso da 0, e $f(0) = 1$.
Derivabilità di funzioni definite a tratti dipendenti da parametri.
Applicazione del teorema di de l'Hopital per il calcolo della pendenza di un eventuale asintoto obliquo.
Derivate successive. Derivata seconda e qualche calcolo.
Funzioni di classe $C^n(X)$ e $C^\infty(X)$. Esempio di una funzione non di classe C^1(**R**) (una funzione che è derivabile su tutto **R**, ma la derivata non è una funzione continua).
Funzioni convesse (concave) e strettamente convesse (strett. concave).
Definizione e rappresentazione grafica. Ogni funzione convessa su un intervallo I può essere discontinua al più negli estremi di I. Esempi di funzioni convesse che non sono derivabili in ogni punto di I. Le funzioni potenze pari sono funzioni strett. convesse in **R**.
Caratterizzazione delle funzioni convesse (strett. convesse) e derivabili su I.
Ogni funzione strett. convessa e derivabili può avere al più un punto critico (un eventuale punto critico è un punto di minimo stretto per f).
Caratterizzazione delle funzioni convesse e derivabili 2 volte su I. Esempio: $f(x)=a^x$ (a diverso da 1, a > 0) è strettamente convessa su **R**. *Punto di flesso*.

	Se f è derivabile due volte in un punto di flesso x_0 in]a,b[, allora f''(x_0)=0. (non vale il viceversa: f(x)=x^4). *Studio di funzione*: schema per affrontare in generale lo studio qualitativo di una funzione. Es. Studio della funzione f(x)=radice quadrata(1-|e^{2x}-1|).
14/11/14 (2 ore):	Conclusione dello studio della funzione f(x)=radice quadrata(1-|e^{2x}-1|). Studio della funzione f(x)=x-1 + 2/(1+|x|/2). Teorema (*Formula di Taylor con il resto di Peano*) (enunciato). *Polinomio di Taylor di ordine n associato ad f e centrato nel punto x_0*. Tale polinomio $P_n(x)$ è unico e verifica $P_n^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0)$. Calcolo del polinomio di Taylor $P_n(x)$ in x_0=0 delle seguenti funzioni: e^x, log(1+x), sin x, cos x, arctan x, $(1+x)^{\alpha}$, 1/(1-x). Calcolo del polinomio di Taylor di ordine 12 centrato in x_0 =0 della funzione f(x)= $\sin^2(x^3)$. Calcolo di un limite in 0 di una forma indeterminata 0/0 usando gli sviluppi di Taylor.
17/11/14 (2 ore):	Cenno alla dim. del Teorema della Formula di Taylor con il resto di Peano. Es. Calcolo di polinomi di Taylor di ordine 3 centrati in x_0=0 (o x_0=1) di qualche funzione composta. Calcolo di limiti usando gli sviluppi di Taylor. Teorema (*Formula di Taylor con il resto di Lagrange*) (enunciato). Dim. che cos x > 1-x^2/2 per ogni x diverso da 0. Il numero di Nepero e come serie di 1/n!; e^x come serie di x^n/n!.
18/11/14 (2 ore):	**Esercitazione:** Studio di funzioni. Formula di Taylor. Limiti con gli sviluppi di Taylor.
20/11/14 (2 ore):	Introduzione alle serie. Paradosso di Zenone di Elea (sommando infinite quantità positive possiamo ottenere una somma finita?). Motivazione euristica del fatto che 1+1/2+1/4+...+1/2^n +... abbia somma finita uguale a 2. Ripasso di alcune definizioni e risultati teorici riguardanti le successioni. Elenco di alcuni limiti importanti di successioni; quadro della gerarchia d'infiniti per le successioni. Definizione di serie. Successione delle somme parziali. Carattere di una serie (convergente, divergente, indeterminata o irregolare). La serie Σ1/2^n come caso particolare della serie geometrica Σq^n. Prova che 0.999... =1. La serie Σ1/(radice di n). La serie di Mengoli Σ1/n(n+1) come caso particolare delle serie telescopiche. La serie Σ1/n! e la serie $\Sigma(-1)^n$. Commenti sul carattere della serie $\Sigma(a_n+b_n)$ a partire dal carattere delle serie Σa_n e Σb_n. Cosa succede per $\Sigma a_n b_n$? *Criteri di convergenza per serie:* Teorema: Condizione necessaria affinchè una serie Σa_n sia convergente, è che la successione {a_n} sia infinitesima. Tale condizione non è sufficiente: Σ1/(radice di n) è una serie divergente nonostante 1/(radice di n) sia un infinitesimo per n tendente a +∞.

21/11/14 (2 ore): Teorema: Condizione necessaria affinchè una serie Σa_n sia convergente, è che il resto (la coda) della serie sia infinitesimo. Corollario: La serie armonica $\Sigma 1/n$ è divergente.
Criteri di convergenza per serie a termini non-negativi: Criterio del confronto, Criterio del confronto asintotico. Criterio della radice n-esima (tutti con dim.). Criterio del rapporto. Esercizi.

24/11/14 (2 ore): Dim. del Criterio del rapporto. Esercizi (usando il criterio del confronto asintotico, il criterio della radice n-esima e il criterio del rapporto).
Serie a termini di segno variabile: serie assolutamente convergente. Criterio della convergenza assoluta (convergenza assoluta implica convergenza). La serie serie $\Sigma(-1)^n/n$ (esempio di serie convergente ma non assolutamente convergente). La convergenza di tale serie segue dal criterio di Leibniz per le serie a segno alterno.
Serie a termini di segno alterno. Criterio di Leibniz. Esercizi.

25/11/14 (2 ore): **Esercitazione:** Studio di funzioni. Limiti con Taylor. Serie numeriche.

27/11/14 (2 ore): Serie dipendenti da un parametro (o serie di funzioni). Esercizi.
Serie di potenze. Insieme di convergenza. Raggio di convergenza.
Teorema: Se r è il raggio di convergenza della serie $\Sigma a_n(x-x_0)^n$, allora la serie converge assolutamente per ogni x tale che $|x-x_0|< r$, e non converge per ogni x tale che $|x-x_0|> r$.
Nulla si può dire a priori per gli x tali che $x-x_0= r$ (oppure $x-x_0= -r$).
Teorema: Criterio per la determinazione del raggio di convergenza per la serie $\Sigma a_n x^n$. Esercizi sulla determinazione del raggio di convergenza di alcune serie di potenze. Determinazione dell'insieme di convergenza per serie di potenze o serie riconducibili a serie di potenze.
Serie di Taylor. Definizione per funzioni $C^\infty(]a,b[)$. Ogni serie di Taylor è convergente? Se essa è convergente, allora la sua somma coincide con la funzione stessa? La seconda domanda non è obsoleta: esempio di una funzione $C^\infty(\mathbf{R})$, la cui serie di Taylor in 0 è nulla, ma essa non è nulla al di fuori di 0). Funzione sviluppabile in serie di Taylor. La serie di Taylor di e^x e di e.

28/11/14 (2 ore): Ancora qualche serie di Taylor (le funzioni sin x e cos x sono sviluppabili in serie di Taylor con centro 0 per ogni $x\in\mathbf{R}$; log(1+x), 1/1-x, arctan x sono sviluppabili in serie di Taylor con centro 0 per ogni x tale che $|x|<1$).
Integrazione – Integrale di Riemann. Introduzione:
a) il problema di trovare una buona definizione di 'area' per una regione piana sottografico di una funzione.
b) il problema di trovare un algoritmo facile per calcolare poi tale area.
Archimede e il metodo di esaustione: calcolo dell''area' del sottografico di $f(x)=x^2$ sul segmento [0,1].
Suddivisione D di [a,b]. *Somma inferiore di* f *relativa alla suddivisione D denotata s(D,* f*). Somma superiore di* f *relativa alla suddivisione D denotata S(D,* f*)*. Proprietà di *s(D,* f*) e S(D,* f*). Funzione integrabile (secondo Riemann). Integrale di Riemann per funzioni limitate su* [a,b]. Esempio di funzione non-integrabile su [0,1] (la funzione di Dirichlet). (Cenno al problema delle primitive e come si fa a calcolare l'integrale di una funzione integrabile una volta data la definizione).

1/12/14 (2 ore): L'integrale e l'area. Interpretazione geometrica dell'integrale. Integrabilità della funzione costante su [a,b]. Classi di funzioni integrabili: le funzioni monotone su [a,b]; le funzioni continue su [a,b].
Es. Calcolo di alcuni integrali usando l'interpretazione geometrica dell'integrale.
Funzioni generalmente continue. Integrabilità di tali funzioni.
Proprietà dell'integrale: linearità dell'integrale rispetto alla funzione integranda; monotonia, additività dell'integrale rispetto all'intervallo d'integrazione (formula di spezzamento).
Teorema della media integrale: Se f è una funzione continua su [a,b], allora esiste $c\in[a,b]$, tale che f(c)=media integrale di f su [a,b].
Oss: ogni somma finita di a_i , i=1,...,n, può essere vista come integrale della funzione $f(x)= a_i$ su [i-1,i[; la media integrale di tale funzione su [0,n] corrisponde alla media aritmetica degli a_i con i=1,...,n.
Funzioni integrali. Estensione dell'integrale ad un intervallo orientato, ossia definizione di integrale definito. Restano conservate tutte le proprietà dell'integrale visto sopra (solo la proprietà di monotonia va opportunamente modificata).
Funzione integrale $F_c(x)$ *di* f *relativa ad un punto* c in [a,b].
Es: Sia f definita su [a,b]. Tracciare un grafico qualitativo di $F_a(x)$ usando l'interpretazione geometrica dell'integrale.
Teorema fondamentale del Calcolo Integrale (enunciato). Oss: La funzione integrale ha sempre un grado di regolarità in più rispetto alla funzione integranda.
Es: Determinazione del grafico della funzione integrale $F_0(x)$ (relativa alla funzione $f(x)=e^{-x^\wedge 2}$) vicino a x=0.

2/12/14 (2 ore): **Esercitazione:** Studio del carattere di serie a termini positivi usando principalmente il criterio del confronto asintotico. Serie di potenze; insieme di convergenza di serie riconducibili a serie di potenze. Qualche esercizio sulla funzione integrale.

4/12/14 (2 ore): Se f è solo generalmente continua su [a,b], la funzione integrale $F_a(x)$ di f non è derivabile in [a,b]. Esempio. Dimostrazione del Teorema fondamentale del Calcolo Integrale. Formula della derivata della funzione integrale con estremi funzioni di x. Esercizi vari sulla funzione integrale (Polinomio di Taylor, equazione retta tangente al grafico di una funzione integrale, punti critici e loro natura).
Funzione primitiva. Tabella delle primitive immediate (e quasi). Osservazioni varie:
1) se f(x) è continua in I, allora la funzione integrale $F_a(x)$ è una primitiva di f;
2) se F(x) è una primitiva di f(x), allora anche F(x)+c lo è per ogni $c\in\mathbf{R}$;
3) se F(x) e G(x) sono due primitive di f(x), allora F(x)= G(x) + c.
4) da quanto sopra segue che se F(x) è una primitiva di una funzione continua f(x) su I, allora $F(x)= F_a(x) + c$. Questo fatto porta all'introduzione del concetto di *integrale indefinito* $\int f(x)dx$ come insieme di tutte le primitive di f rispetto alla variabile x.
Attenzione: non confondere i concetti di integrale definito di f (è un numero reale), di funzione integrale di f (è una funzione) e di integrale indefinito di f (è un simbolo che denota l'insieme delle funzioni primitive di f).

Oss. Nonostante che ogni funzione continua abbia sempre primitiva, non è detto che tale primitiva si possa esprimere con funzioni elementari. Es. e^{-x^2}, (sinx)/x, (cosx)/x, $\sin x^2$.

Teorema di Torricelli-Barrow. Esercizi vari: calcolo d'integrali definiti immediati o quasi; calcolo dell'area di un sottografico; calcolo di integrali definiti con funzione integranda contenente il valor assoluto.

5/12/14 (2 ore): Lezione fatta dall'esercitatore). Alcuni metodi utili per il calcolo di primitive: formula d'integrazione per parti; formula d'integrazione per sostituzione; integrazione di funzioni razionali (al denominatore polinomio di grado minore o uguale a 2).

9/12/14 (2 ore): **Esercitazione:** Qualche sostituzione speciale. Esercizi su primitive, calcolo di aree di regioni piane delimitate da grafici.

11/12/14 (2 ore): *Integrali generalizzati (o impropri)*.

Integrazione per funzioni non limitate: Funzione integrabile (in senso improprio o generalizzato) in [a,b[e integrale convergente (divergente positivamente, divergente negativamente, che non esiste). Analoghe definizioni su]a,b].

Esempi: integrabilità di $1/x^\alpha$ su]0,1]; più in generale di $1/(b-x)^\alpha$ su [a,b[, di $1/(x-a)^\alpha$ su]a,b]. Integrabilità di $1/[x(-\log x)^\beta]$ su]0,1/2].

Integrazione per funzioni su intervalli illimitati: Funzione integrabile (in senso improprio o generalizzato) in [a,+∞[e integrale convergente (divergente positivamente, divergente negativamente, che non esiste). Analoghe definizioni su]-∞,b].

Esempi: integrabilità di $1/x^\alpha$ su [1,+∞[; integrabilità di $1/[x(\log x)^\beta]$ su [2,+∞[.

Qualche studio di convergenza usando la definizione.

Estensione del concetto di integrale generalizzato su]a,b[(possibilmente anche]-∞,+∞[). Integrabilità di 1/(x^2+1) su]-∞,+∞[.

Criteri di convergenza: *Criterio del confronto e criterio del confronto asintotico*.

Esercizi. L'integrabilità della funzione gaussiana e^($-x^2$) su [0,+∞[.

12/12/14 (2 ore): Funzioni assolutamente integrabili. Esercizi sull'integrabilità usando il criterio del confronto e del confronto asintotico.

Serie e integrali generalizzati. Convergenza della serie armonica generalizzata $\sum 1/n^\alpha$ se $\alpha > 1$. Convergenza della serie $\sum 1/[n(\log n)^\beta]$ se $\beta > 1$.

Equazioni differenziali ordinarie di ordine n. Eq. diff. in forma normale.

15/12/14 (2 ore): Esempi: y'(x)=f(x); y'(x)=ay(x) (il modello di Malthus della dinamica di una popolazione isolata); y'(x)=2y(x)+x; y"(x)=x. Integrale generale di un'equazione differenziale. Il problema di Cauchy per y'(x)=f(x,y(x)). Il problema di Cauchy per y"(x)=f(x,y(x),y'(x)). Esempi.

Esistenza ed unicità della soluzione di un problema di Cauchy: varie osservazioni (esistenza locale per $y'(x)= y^2(x)$ con y(0)=1; non unicità della soluzione per $y'(x)=3y(x)^{2/3}$ con y(0)=0 – pennello di Peano).

Metodo risolutivo per equazioni differenziali a variabili separabili y'(x)=h(x)g(y(x)).

Esempi: L'integrale generale di $y'(x)=y^2(x)$; $y'(x)=e^{-y(x)}$; y'(x)=-2x(y(x)-1).

16/12/14 (2 ore): **Esercitazione:** Funzione seno e coseno iperbolico. Qualche primitiva con la sostituzione senh x e cosh x. Esercizi sulla convergenza di integrali impropri.

Eq. diff. a variabili separabili. Eq. diff. lineari del primo ordine a coefficienti variabili.

18/12/14 (2 ore): *Metodo risolutivo per eq. diff. lineari del primo ordine a coefficienti variabili*. Esercizi. *Metodo risolutivo per eq. diff. lineari del secondo ordine a coefficienti costanti*. Esercizi.

19/12/14 (2 ore): Esercizi vari sulle equazioni differenziali. Esercizi su serie, integrali, integrali impropri.

20/12/14 (2.30 ore): Seconda Prova Intermedia