

1) Dati gli insiemi

i) $A = \{a_n : a_n = [1 + (-1)^n] \frac{n-1}{n}, n \in \mathbf{N}^+\};$

ii) $B = \{x_n : x_n = (\cos n\pi)^3 - \frac{3}{n}, n \in \mathbf{N}^+\};$

iii) $C = \{\frac{n+n^2}{n-1} : n \in \mathbf{N}, n \geq 2\},$

determinate $\inf A$ e $\sup A$, determinate $\inf B$ e $\sup B$ e $\inf C$ e $\sup C$. Sono minimi e massimi?

2) i) Individuate gli insiemi

$$A = \{x \in \mathbf{R} : x^2 + x \log_2 8 + \log_{1/2} 16 \leq 0\} \quad \text{e} \quad B = \{x \in \mathbf{R} : e^{|x-3|} > \frac{1}{e^{x+1}}\}.$$

ii) Calcolate $\sup A$ e $\inf(B \setminus A)$, e dite se sono massimo e minimo (rispettivamente).

3) i) Individuate gli insiemi $A = \{x \in \mathbf{R} : |x-2| < 3\}$ e $B = \{x \in \mathbf{R} : \sqrt{x|x|} - 2 \leq 1\}$.

ii) Dite se sono insiemi limitati inferiormente/limitati superiormente/limitati.

iii) Determinate $A \cup B$, $A \cap B$ e $A \setminus B$.

iv) Determinate $\inf(A \cap B)$ e $\sup A$.

4) i) Determinate l'insieme $A = \{x \in \mathbf{R} : |\frac{x}{x-1}| > 1\}$. Dite se A è un intervallo. Dite se è limitato.

ii) Determinate l'insieme $B = \{x \in \mathbf{R} : \log_2(3 - |x|) < 1\}$. Dite se B è un intervallo. Dite se è limitato.

iii) Determinate $\inf A$ e $\sup B$.

5) Provate per induzione che

i) $\sum_{k=0}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} \quad \forall n \in \mathbf{N};$

ii) $3^n \geq n2^n \quad \forall n \in \mathbf{N}.$

6) Dite quali delle seguenti funzioni sono iniettive (motivando le risposte), e quali sono dispari:

i) $f : \mathbf{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbf{R} \quad f(x) = x + \frac{1}{x};$

ii) $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} \quad f(x) = 2 + \sin x;$

iii) $f : \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R} \quad f(x) = x - \frac{1}{x};$

iv) $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} \quad f(x) = x^3 - 2.$

7) Siano date le funzioni $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ e $g :]-\infty, 0[\rightarrow \mathbf{R}$

$$f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{se } x > 0 \\ 3x + 1 & \text{se } x \leq 0 \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{se } x \leq -1 \\ -x - 1 & \text{se } -1 < x < 0. \end{cases}$$

i) Determinate l'immagine di f e l'immagine di g .

ii) Dite se sono funzioni iniettive, e se sono funzioni suriettive.

iii) Determinate, dove esiste, la funzione composta $f \circ g$.

8) Risolvete le seguenti disequazioni trigonometriche:

i) $2 \sin^2 x - 5 \sin x + 2 < 0$

ii) $|\cos x - 1| < \cos x.$