Università di Trento - Dip. di Ingegneria e Scienza dell'Informazione

CdL in Informatica, Ingegneria Elettronica e delle Telecomunicazioni e Ingegneria dell'Informazione e Gestione D'Impresa

a.a. 2014-2015 - Foglio di esercizi 4

1) Sia $f :]-3,0[\cup[1,2[\to \mathbf{R}$ la funzione definita da

$$f(x)=\begin{cases} x+2 & \text{se } -3<x\le -1\\ x^2-1 & \text{se } -1<x<0\\ -3x+7 & \text{se } 1\le x<2\,. \end{cases}$$

i) Rappresentate graficamente f , e determinate $\inf f$ e $\sup f$. Dite se sono minimo e massimo.
ii) Disegnate, nei rispettivi domini, i grafici qualitativi delle funzioni $x\mapsto f(x)+1$, $x\mapsto f(x+1)$, $x\mapsto \frac{1}{4}f(x)$ e $x\mapsto -3f(x)+2$.

2) i) Tracciate un grafico qualitativo delle funzioni

$$|2x^2+4x+1|\,;\qquad -|x^2-2x-3|+1\,;\qquad |2^{|x|}-2|\,;\qquad 1-\sqrt[3]{x+1}\,;\qquad ||\sqrt[3]{x}|-2|$$

nel dominio naturale. Individuate per ciascuna funzione gli eventuali punti di massimo/minimo locali (relativi).

ii) Tracciate un grafico qualitativo di $f(x)=|\frac{\pi}{2}-\arccos x|$ e di $g(x)=\arccos|x|$ su $[-1,1]$. Determinate il minimo e il massimo (rispett. i punti di minimo e i punti di massimo) di f e di g .

3) i) Siano $f(x)=|\log|x||$ e $g(x)=\begin{cases} x^2 & \text{se } x<0\\ 1 & \text{se } x\ge 0\,. \end{cases}$

Determinate il dominio naturale della funzione composta $(g\circ f)(x)$ e scrivete la sua espressione. Determinate l'immagine di $g\circ f$ e dite se $g\circ f$ è iniettiva o pari.

ii) Siano $f(x)=e^{|x-\frac{\pi}{4}|}$ e $g(x)=\arctan(x+1)$.
Determinate l'immagine della funzione composta $(f\circ g)(x)$ e dite se $f\circ g$ è iniettiva.

4) Determinate il dominio naturale B della funzione $f(x)=\arccos(2+4x)$; dite se $f:B\to[0,\pi]$ è invertibile. Determinate eventualmente l'inversa.

5) Risolvete in $\mathbf{R}$ le seguenti equazioni:
i) $\sin(\arcsin(2x+1))=x-3$;
ii) $\arcsin(\sin x)=2x-1$;
iii) $\sin(\arcsin(\frac{x^2}{2}))=x+\frac{3}{2}$;

iv) $\arcsin(\cos(x^2 - x)) = \dfrac{\pi}{2}$.

6) i) Provate se le seguenti funzioni, nei loro domini naturali, sono funzioni simmetriche (pari o dispari):

$$\frac{x^3}{x^2-1}\,; \qquad x^2 \arctan(3x)\,; \qquad x \arcsin(4x)\,; \qquad \log(1+|x|)\,.$$

ii) Determinate l'immagine delle funzioni $f(x) = \log(1+e^x)$ e $g(x) = \sqrt[3]{-\arctan x + 1}$ ristrette all'insieme $[0,1]$.

7) Siano $f : [-1,1] \to \mathbf{R}$ e $g :]0,+\infty[\to \mathbf{R}$ le funzioni definite da

$$f(x) = \begin{cases} -3 & \text{se } -1 \le x < 0 \\ 2 & \text{se } 0 \le x \le 1 \end{cases} \qquad g(x) = \log_2 x\,.$$

Determinate, dove esistono, le funzioni composte $(f \circ g)(x)$ e $(g \circ f)(x)$. Rappresentatele graficamente. Sono funzioni costanti? Ammettono massimo e minimo?

8) Sia $f(x) = \arcsin x + |\arcsin x|$ per $x \in [-1,1]$. Tracciate un grafico qualitativo di f .
i) Determinate, al variare di $k \in \mathbf{R}$, il numero delle soluzioni dell'equazione $f(x) = k$.
ii) f è strettamente monotona su $[-1,1]$?

9) i) Determinate il dominio naturale delle seguenti funzioni

a) $\sqrt{\log_{1/2}|x| - 1}\,; \qquad \arccos(x^2 - 2)\,;$

b) $\sqrt[3]{\arcsin x} - 1\,; \qquad \arcsin(\sqrt[3]{x} - 1)\,;$

ii) Studiate la monotonia delle funzioni date in i)b) (sfruttando la monotonia nota delle funzioni elementari).

10) i) Provate che la successione $\{a_n\} = \{\frac{n^2-1}{2n}\}$, $n \ge 1$ è strettamente crescente (ossia, per ogni $n \in \mathbf{N}$ si ha $a_n < a_{n+1}$).
ii) La successione $\{b_n\} = \{\arctan a_n\}$ è strettamente crescente?