Università di Trento - Dip. di Ingegneria e Scienza dell'Informazione

CdL in Informatica, Ingegneria Elettronica e delle Telecomunicazioni e Ingegneria dell'Informazione e Gestione D'Impresa

a.a. 2014-2015 - Foglio di esercizi 8

1) *una volta caldi ...* Studiate le seguenti funzioni (dominio, simmetrie, limiti, segno, continuità, derivabilità, punti critici e loro natura, convessità/concavità se possibile) e tracciate di ciascuna un grafico qualitativo:

$$|x|\sqrt{1-x^2}\,; \qquad e^{x-|x^2-x-2|}\,; \qquad \sqrt{x^2-|x-1|}\,; \qquad \sqrt{x^2+9}-\frac{1}{2}|x|\,;$$

$$x^2(\log|x|-1)\,; \qquad (x+1)e^{\frac{x}{x-1}}\,; \qquad \log\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\,; \qquad \frac{1}{|\sin x+\cos x|}\,.$$

2) i) Studiate brevemente la funzione $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2+1}$. Determinate l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto $(0,f(0))$ e poi nel punto $(1,f(1))$. Rappresentate nello stesso sistema di riferimento la funzione f e le due rette tangenti.

ii) Determinate l'insieme dei numeri reali α tali che l'equazione $\dfrac{3}{x}=\alpha x^4-x$ abbia una soluzione nell'intervallo $]0,1[$.

3) i) Determinate il massimo e il minimo (risp. punti di massimo e punti di minimo di $f(x)=|x|\sqrt{1-x^2}$ su $[-\frac{1}{4},\frac{3}{4}]$.

ii) Determinate il massimo e il minimo (risp. punti di massimo e punti di minimo di $f(x)=e^{x-|x^2-x-2|}$ su $[-3,1]$.

4) i) Esprimete i numeri decimali periodici $0.\overline{3}$ e $0.1\overline{53}$ in frazione usando la serie geometrica.

ii) Calcolate la somma della seguente serie, dove $\alpha\in\mathbf{R}$ è fissato:

$$1+\frac{1}{\alpha^4+3}+\frac{1}{(\alpha^4+3)^2}+\frac{1}{(\alpha^4+3)^3}+\cdots+\frac{1}{(\alpha^4+3)^n}+\ldots$$

5) *... da fare ad occhi chiusi ...* Determinate il carattere delle seguenti serie:

$$\text{i) } \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n^3+1}}\,; \qquad \text{ii) } \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{n^2+3}\,; \qquad \text{iii) } \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n-\sin n}{n(n+1)}\,; \qquad \text{iv) } \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\arctan n}{2^n+3}\,;$$

$$\text{v) } \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^\alpha(n+1)}}\,; \quad \text{vi) } \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\arctan\frac{1}{n}}{n^{2\alpha}+1}\,; \quad \text{vii) } \sum_{n=0}^{\infty}(2\alpha+3\alpha^2)^n \quad \text{al variare di } \alpha\in\mathbf{R}\,.$$

6) Studiate la convergenza assoluta e la convergenza (semplice) delle seguenti serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})\,; \qquad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(\pi/2+n\pi)}{n+3}\,; \qquad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(\pi/2+n\pi)}{n^2+1}\,.$$

7) Determinate l'insieme di convergenza delle seguenti serie:

i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n2^n}$; ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt[n]{n}-1)^n x^n$; iii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-2}\frac{(2x)^n}{n}$; iv) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n!}{(4n+1)!}x^n$;

v) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}n(x-2)^n$; vi) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+3}{3n^2+4}(x-3)^n$; vii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{2n+1}(2-\log x)^n$;

viii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{3^n+1}x^n$; ix) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\Big(\frac{x+1}{x-1}\Big)^n$; x) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+n}{4^n+1}\Big(\frac{x+2}{x^2-2x+3}\Big)^n$.

8) Determinate l'insieme degli $\alpha\in\mathbf{R}$ per i quali la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n^\alpha+n^{-\alpha}}$ risulta convergente.

9) Sia $\{a_n\}_n$ una successione di numeri reali non nulli tale che la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\log(1+a_n^2)$ risulta convergente. Quali delle seguenti affermazioni sono vere e quali sono false:

i) È certo che la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_n^2$ è convergente;

ii) È certo che la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|$ è convergente;

iii) È certo che la $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_n^2$ può essere divergente;

iv) È certo che la $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}e^{-\frac{1}{a_n}}$ è convergente.