

Soluzioni del foglio d'esercizi recupero II

Per comodità ricordiamo gli sviluppi di Taylor centrati in $x_0 = 0$ delle funzioni elementari utilizzati negli esercizi in seguito:

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) \quad \text{per } x \rightarrow 0 \\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) \end{aligned}$$

$$\text{ii)} \quad \log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} x^n + o(x^n)$$

$$\begin{aligned} \text{iii)} \quad \sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1}) \\ &= x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040} + \dots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{iv)} \quad \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n}) \\ &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + \dots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n}) \end{aligned}$$

$$\text{v)} \quad \tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15} x^5 + o(x^6)$$

$$\text{vi)} \quad \arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} + o(x^9)$$

Es. 1. Calcolare lo sviluppo di Taylor centrato in $x_0 = 0$ delle seguenti funzioni fino all'ordine indicato. Determinare l'ordine di infinitesimo.

$$\text{a)} \quad \boxed{e^{x^3} - 1 - \sin x^3} \quad [n=12]$$

$$e^{x^3} = 1 + x^3 + \frac{x^6}{2} + \frac{x^9}{6} + \frac{x^{12}}{24} + o(x^{12}) \quad \text{per } x \rightarrow 0$$

$$\sin x^3 = x^3 - \frac{x^9}{6} + \frac{x^{15}}{120} + o(x^{12}) \quad \text{per } x \rightarrow 0$$

Quindi

$$\begin{aligned} e^{x^3} - 1 - \sin x^3 &= \cancel{1} + \cancel{x^3} + \frac{x^6}{2} + \frac{x^9}{6} + \frac{x^{12}}{24} - \cancel{1} - \cancel{x^3} + \frac{x^9}{6} + o(x^{12}) \\ &= \frac{x^6}{2} + \frac{x^9}{3} + \frac{x^{12}}{24} + o(x^{12}). \end{aligned}$$

ordine di infinitesimo = 6.



b) $\boxed{2 \operatorname{arctg}(\sin x) - \sin(2x)} \quad [n=5]$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5) \quad \text{per } x \rightarrow 0$$

$$\begin{aligned} \operatorname{arctg}(\sin x) &= \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5) \right) - \frac{1}{3} \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5) \right)^3 + \\ &\quad + \frac{1}{5} \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5) \right)^5 + o(x^5) \\ &= \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5) \right) - \frac{1}{3} \left(x^3 - \frac{x^5}{2} + o(x^5) \right) + \frac{1}{5} (x^5 + o(x^5)) + o(x^5) \\ &= x - \frac{1}{2} x^3 + \frac{3}{8} x^5 + o(x^5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin 2x &= 2x - \frac{(2x)^3}{3!} + \frac{(2x)^5}{5!} + o(x^5) = 2x - \frac{8x^3}{6} + \frac{32x^5}{120} + o(x^5) \\ &= 2x - \frac{4}{3} x^3 + \frac{4}{15} x^5 + o(x^5) \end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{arctg}(\sin x) - \sin(2x) &= \cancel{2x} - x^3 + \frac{3}{4} x^5 - \cancel{2x} + \frac{4}{3} x^3 - \frac{4}{15} x^5 + o(x^5) \\ &= \underline{\underline{\frac{4}{3} x^3 + \frac{29}{60} x^5 + o(x^5)}}. \end{aligned}$$

ordine di infinitesimo = 3.

□

c) $\boxed{\cos(\sqrt{2}x) \log(1 + \sqrt{3}x)} \quad [n=4]$

$$\cos(\sqrt{2}x) = 1 - \frac{(\sqrt{2}x)^2}{2} + \frac{(\sqrt{2}x)^4}{24} + o(x^4) = 1 - x^2 + \frac{1}{6} x^4 + o(x^4)$$

$$\begin{aligned} \log(1 + \sqrt{3}x) &= \sqrt{3}x - \frac{(\sqrt{3}x)^2}{2} + \frac{(\sqrt{3}x)^3}{3} - \frac{(\sqrt{3}x)^4}{4} + o(x^4) \\ &= \sqrt{3}x - \frac{3}{2} x^2 + \sqrt{3} x^3 - \frac{9}{4} x^4 + o(x^4) \end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{aligned} \cos(\sqrt{2}x) \log(1 + \sqrt{3}x) &= \left(1 - x^2 + \frac{1}{6} x^4 + o(x^4) \right) \left(\sqrt{3}x - \frac{3}{2} x^2 + \sqrt{3} x^3 - \frac{9}{4} x^4 + o(x^4) \right) \\ &= \sqrt{3}x - \frac{3}{2} x^2 + \cancel{\sqrt{3} x^3} - \frac{9}{4} x^4 - \cancel{\sqrt{3} x^3} + \frac{3}{2} x^4 + o(x^4) \\ &= \underline{\underline{\sqrt{3}x - \frac{3}{2} x^2 - \frac{3}{4} x^4 + o(x^4)}}. \end{aligned}$$

ordine di infinitesimo = 1

□

$$d) \boxed{\log(1-x+x^2)} \quad [n=3]$$

$$\begin{aligned} \log(1+(-x+x^2)) &= (-x+x^2) - \frac{(-x+x^2)^2}{2} + \frac{(-x+x^2)^3}{3} + o(x^3) \\ &= (-x+x^2) - \frac{1}{2}(x^2-2x^3+o(x^3)) - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3) \\ &= -x+x^2 - \frac{1}{2}x^2 + x^3 - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3) \\ &= \underline{\underline{-x + \frac{x^2}{2} + \frac{2}{3}x^3 + o(x^3)}} \end{aligned}$$

ordine di infinitesimo = 1.

□

$$e) \boxed{\cos(3 \operatorname{tg} x) - \cos(3 \sin x)} \quad [n=4]$$

$$\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3) \quad \text{per } x \rightarrow 0$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

$$\begin{aligned} \cos(3 \operatorname{tg} x) &= \cos\left(3x + x^3 + o(x^3)\right) = 1 - \frac{(3x + x^3 + o(x^3))^2}{2} + \frac{(3x + x^3 + o(x^3))^4}{24} + o(x^4) \\ &= 1 - \frac{1}{2}(9x^2 + 6x^4 + o(x^4)) + \frac{1}{24} \cdot \frac{27}{8} x^4 + o(x^4) \\ &= 1 - \frac{9}{2}x^2 - 3x^4 + \frac{27}{8}x^4 + o(x^4) \\ &= 1 - \frac{9}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4 + o(x^4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos(3 \sin x) &= \cos\left(3x - \frac{x^3}{2} + o(x^3)\right) = 1 - \frac{\left(3x - \frac{x^3}{2} + o(x^3)\right)^2}{2} + \frac{\left(3x - \frac{x^3}{2} + o(x^3)\right)^4}{24} + o(x^4) \\ &= 1 - \frac{1}{2}\left(9x^2 - 3x^4 + o(x^4)\right) + \frac{27}{24}x^4 + o(x^4) \\ &= 1 - \frac{9}{2}x^2 + \frac{3}{2}x^4 + \frac{27}{8}x^4 + o(x^4) \\ &= 1 - \frac{9}{2}x^2 + \frac{39}{8}x^4 + o(x^4) \end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{aligned} \cos(3 \operatorname{tg} x) - \cos(3 \sin x) &= \cancel{1 - \frac{9}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4 + o(x^4)} - \cancel{1 - \frac{9}{2}x^2 + \frac{39}{8}x^4 + o(x^4)} \\ &= -\frac{\cancel{36}}{\cancel{8}}x^4 + o(x^4) \\ &= \underline{\underline{-\frac{9}{2}x^4 + o(x^4)}} \end{aligned}$$

ordine di infinitesimo = 4.

■

Es. 2. Calcolare i seguenti limiti utilizzando gli sviluppi di Taylor

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x + x^5}{x^3} = \underline{\underline{\frac{1}{6}}}.$$

$$\begin{aligned} \text{Infatti, } \frac{x - \sin x + x^5}{x^3} &= \frac{x - \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) + x^5}{x^3} = \\ &= \frac{\frac{x^3}{6} + o(x^3)}{x^3} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{1}{6}. \end{aligned} \quad \square$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \log(1-x+x^2) + \sin x \operatorname{tg} x}{x - \sin x} = \underline{\underline{3}}.$$

$$\begin{aligned} \text{Infatti } \frac{x \log(1-x+x^2) + \sin x \operatorname{tg} x}{x - \sin x} &= \\ &= \frac{x \left(-x + \frac{x^2}{2} + \frac{2}{3}x^3 + o(x^3)\right) + \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) \left(x + \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)}{x^3/6 + o(x^3)} \\ \text{Es. 1d)} &= \frac{\cancel{x^2} + \frac{x^3}{2} + o(x^3) + \cancel{x^2} + o(x^3)}{x^3/6 + o(x^3)} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 3. \end{aligned} \quad \square$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x [\cos(3 \operatorname{tg} x) - \cos(3 \sin x)]}{\sin x^6 + x^5 - 2x^4} = \underline{\underline{\frac{9}{4}}}.$$

$$\begin{aligned} \text{Infatti, } \frac{\cos x [\cos(3 \operatorname{tg} x) - \cos(3 \sin x)]}{\sin x^6 + x^5 - 2x^4} &= \frac{(1 + o(x))(-\frac{9}{2}x^4 + o(x^4))}{-2x^4 + o(x^4)} = \\ &\quad \text{Es. 1e)} \\ &= \frac{-\frac{9}{2}x^4 + o(x^4)}{-2x^4 + o(x^4)} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{9}{4}. \end{aligned} \quad \square$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5^{1+\operatorname{tg}^2 x} - 5}{1 - \cos x} = \underline{\underline{10 \log 5}}.$$

$$\begin{aligned} \text{Infatti: } \frac{5^{1+\operatorname{tg}^2 x} - 5}{1 - \cos x} &= \frac{5(5^{\operatorname{tg}^2 x} - 1)}{x^2/2 + o(x^2)} = \frac{5(e^{(\operatorname{tg}^2 x) \log 5} - 1)}{x^2/2 + o(x^2)} = \frac{5(e^{(\log 5)(x+o(x))^2} - 1)}{x^2/2 + o(x^2)} \\ &= \frac{5 \left(\cancel{1} + (\log 5)(x+o(x))^2 + o(x^2) - \cancel{1} \right)}{x^2/2 + o(x^2)} = \frac{(5 \log 5)x^2 + o(x^2)}{x^2/2 + o(x^2)} \\ &\xrightarrow{x \rightarrow 0} 2(5 \log 5) = 10 \log 5. \end{aligned} \quad \blacksquare$$

Es. 3. Determinare, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$, il comportamento del seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{x^\alpha} - 1 + \log(1+x) - x}{\sin^2 x + (\sin x - x)(1+x^2)}.$$

Notiamo innanzitutto che

$$\begin{aligned} \sin^2 x + (\sin x - x)(1+x^2) &= (x + o(x))^2 + \left(-\frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)(1+x^2) \\ &= x^2 + o(x^2) \quad \text{per } x \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Inoltre, per $\alpha > 0$ e $x \rightarrow 0$, si ha $x^\alpha \rightarrow 0$, e

$$e^{x^\alpha} = 1 + x^\alpha + \frac{x^{2\alpha}}{2} + \frac{x^{3\alpha}}{6} + o(x^{3\alpha}) \quad \text{per } x \rightarrow 0.$$

Dunque

$$\begin{aligned} \frac{e^{x^\alpha} - 1 + \log(1+x) - x}{\sin^2 x + (\sin x - x)(1+x^2)} &= \frac{1 + x^\alpha + \frac{x^{2\alpha}}{2} + \frac{x^{3\alpha}}{6} + o(x^{3\alpha}) - 1 + \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right) - x}{x^2 + o(x^2)} \\ &= \frac{x^\alpha + \frac{x^{2\alpha}}{2} + \frac{x^{3\alpha}}{6} + o(x^{3\alpha}) - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)}{x^2 + o(x^2)} \doteq I_\alpha \end{aligned}$$

Allora, se

$$\alpha > 2 \quad I_\alpha = \frac{-\frac{x^2}{2} + o(x^2)}{x^2 + o(x^2)} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} -\frac{1}{2}$$

$$\alpha = 2 \quad I_2 = \frac{\frac{x^2}{2} + o(x^2)}{x^2 + o(x^2)} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{2}$$

$$\alpha < 2 \quad I_\alpha = \frac{x^\alpha + o(x^\alpha)}{x^2 + o(x^2)} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} +\infty.$$

Es. 4 Determinare il comportamento delle seguenti serie:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n 2^n}$

• possiamo applicare il criterio del confronto: $0 < \frac{1}{n 2^n} \leq \frac{1}{2^n} \quad \forall n \geq 1$,
poiché la serie geometrica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} < +\infty$, anche la serie data
risulta convergente.

• possiamo applicare il criterio della radice n-esima:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n 2^n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n} \cdot 2} = \frac{1}{2} < 1, \text{ quindi la serie data è convergente.}$$

□

b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3n+2}{12n+2}$: basta osservare che $a_n = \frac{3n+2}{12n+2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{4} \neq 0$.
Quindi la serie data non converge. Essendo una serie a termini positivi possiamo concludere che è una serie divergente positivamente. $\square$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+(-1)^n}{3^n}$: Si verifica facilmente che la serie è assolutamente convergente.

Infatti

$$\left| \frac{2+(-1)^n}{3^n} \right| \leq \frac{3}{3^n} = \frac{1}{3^{n-1}}.$$

Poiché la serie geometrica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^{n-1}} = 3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} < +\infty$,

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{2+(-1)^n}{3^n} \right| < +\infty$, e quindi la serie data è convergente.

(Si poteva anche solo osservare che

$$0 < \frac{2+(-1)^n}{3^n} \leq \frac{3}{3^n},$$

e dalla convergenza della serie $\sum \frac{1}{3^n}$, segue la convergenza (assoluta) della serie data). $\square$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+(-1)^n}{n}$: Basta osservare che

$$\frac{2+(-1)^n}{n} \geq \frac{1}{n} \quad \forall n \geq 1$$

Poiché la serie armonica $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = +\infty$, per il criterio del confronto si conclude che la serie data è divergente positivamente. $\blacksquare$

Es.5. Determinare per quali valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ le seguenti serie sono convergenti:

a) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3+2\alpha}{\alpha^2+3} \right)^n$: la serie data è una serie geometrica di ragione $q = \frac{3+2\alpha}{\alpha^2+3}$. Essa risulta convergente se e solo se

$$|q| < 1. \text{ Abbiamo } \left| \frac{3+2\alpha}{\alpha^2+3} \right| < 1 \Leftrightarrow -1 < \frac{3+2\alpha}{\alpha^2+3} < 1$$

$$\Leftrightarrow -(\alpha^2+3) < 3+2\alpha < \alpha^2+3 \quad (\text{nota: } \alpha^2+3 > 0 \quad \forall \alpha \in \mathbb{R})$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} d^2 + 2d + 6 > 0 \\ d^2 - 2d > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \forall d \in \mathbb{R} \\ d < 0 \text{ o } d > 2 \end{cases}$$

Quindi, la serie data è convergente per $d \in]-\infty, 0[\cup]2, +\infty[$.

b) $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n + (\log n)^7}{n^{\alpha+3}}$: Osserviamo che la serie è a termini positivi; inoltre ricordiamo che $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(\log n)^7}{n} = 0$ (guardia degli infiniti; oppure provate, usando il teorema di de l'Hopital, che $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\log x)^7}{x} = 0$)

Quindi $\frac{n + (\log n)^7}{n^{\alpha+3}} \sim \frac{n}{n^{\alpha+3}} = \frac{1}{n^{\alpha+2}}$ per $n \rightarrow +\infty$.

Poiché la serie armonica generalizzata $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^{\alpha+2}}$ è convergente $\Leftrightarrow \alpha+2 > 1$, ossia $\alpha > -1$, per il criterio del confronto asintotico la serie data è convergente se e solo se $\alpha > -1$. $\square$

c) $\sum_{n=2}^{\infty} (n^7 + \sin n) \left(\sin \frac{1}{n^\alpha} \right)$ con $\alpha > 0$: Osserviamo che la serie è a termini positivi; inoltre si ha $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin n}{n^7} = 0$ poiché $|\sin n| \leq 1 \forall n \in \mathbb{N}$. Usando lo sviluppo di Taylor per la funzione $\sin x$, per $x \rightarrow 0$, si ha subito che

$$(n^7 + \sin n) \left(\sin \frac{1}{n^\alpha} \right) \sim n^7 \cdot \frac{1}{n^\alpha} = \frac{1}{n^{\alpha-7}} \text{ per } n \rightarrow +\infty.$$

Poiché la serie armonica generalizzata $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha-7}}$ è convergente $\Leftrightarrow \alpha-7 > 1$, ossia $\alpha > 8$, per il criterio del confronto asintotico la serie data è convergente se e solo se $\alpha > 8$. $\blacksquare$

Es. 6. Calcolare i seguenti integrali definiti

a) $\int_0^2 \frac{7}{x^2 + 2x + 5} dx$

Notiamo che $x^2 + 2x + 5 = 0$ non ha radici reali; in questo caso si ha

$$\int \frac{7}{x^2 + 2x + 5} dx = \int \frac{7}{(x+1)^2 + 4} dx = \frac{7}{4} \int \frac{1}{\left(\frac{x+1}{2}\right)^2 + 1} dx =$$

$$= \frac{7}{2} \int \frac{\frac{1}{2}}{1 + \left(\frac{x+1}{2}\right)^2} dx = \frac{7}{2} \arctan\left(\frac{x+1}{2}\right) + c \quad c \in \mathbb{R}.$$

Quindi

$$\int_0^2 \frac{7}{x^2 + 2x + 5} dx = \left[\frac{7}{2} \arctan\left(\frac{x+1}{2}\right) \right]_0^2 = \frac{7}{2} \left[\arctan\frac{3}{2} - \arctan\frac{1}{2} \right]. \quad \square$$

b) $\int_1^2 \sin(\log x) dx$

Usiamo primo il metodo di sostituzione; si ha

$$\int \sin(\log x) dx = \int_{\log x = t} e^t \sin t dt.$$

$$x = e^t$$

$$dx = e^t dt$$

Ora usiamo il metodo di integrazione per parti:

$$\int \underbrace{e^t}_{f'} \underbrace{\sin t}_g dt = e^t \sin t - \int \underbrace{e^t}_{f'} \underbrace{\cos t}_g dt = e^t \sin t - e^t \cos t - \int e^t \sin t dt$$

nuovamente per parti

da cui

$$\int e^t \sin t dt = \frac{1}{2} (e^t \sin t - e^t \cos t) \quad \text{e quindi}$$

$$\int \sin(\log x) dx = \frac{1}{2} (x \sin(\log x) - x \cos(\log x)) + c.$$

Quindi

$$\int_1^2 \sin(\log x) dx = \left[\frac{1}{2} (x \sin(\log x) - x \cos(\log x)) \right]_1^2 =$$

$$= \left[\sin(\log 2) - \cos(\log 2) \right] - \frac{1}{2} (\sin 0 - \cos 0)$$

$$= \sin(\log 2) - \cos(\log 2) + \frac{1}{2}. \quad \square$$

$$c) \int_{-\sqrt{3}/2}^{\sqrt{3}/2} \sqrt{3-4x^2} dx$$

Usiamo innanzitutto il metodo di sostituzione

$$\int \sqrt{3-4x^2} dx \stackrel{x = \frac{\sqrt{3}}{2} \cos t \quad t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}{=} \sqrt{3} \int \cos t \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cos t dt$$

$$dx = \frac{\sqrt{3}}{2} \cos t dt$$

$$= \frac{3}{2} \int \cos^2 t dt$$

Usiamo ora il metodo d'integrazione per parti

$$\int \cos^2 t dt = \int \underbrace{\cos t}_{f'} \underbrace{\cos t}_{g} dt = \sin t \cos t + \int \sin^2 t dt =$$

$$= \sin t \cos t + \int (1 - \cos^2 t) dt = \sin t \cos t + t - \int \cos^2 t dt$$

da cui

$$\int \cos^2 t dt = \frac{\sin t \cos t + t}{2} + c \quad \text{e quindi}$$

$$\int \sqrt{3-4x^2} dx \stackrel{x = \frac{\sqrt{3}}{2} \cos t}{=} \frac{3}{2} \int \cos^2 t dt = \frac{3}{4} \left[\frac{\sin t \cos t + t}{2} \right] + c$$

$$x = \frac{\sqrt{3}}{2} \cos t$$

$$= \frac{3}{4} \left[\frac{2x}{\sqrt{3}} \sqrt{1 - \frac{4}{3}x^2} + \arcsin \frac{2}{\sqrt{3}}x \right] + c$$

$$= \frac{1}{4} \left[2x \sqrt{3-4x^2} + 3 \arcsin \frac{2}{\sqrt{3}}x \right] + c$$

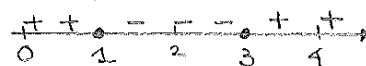
Ne segue

$$\int_{-\sqrt{3}/2}^{\sqrt{3}/2} \sqrt{3-4x^2} dx = 2 \int_0^{\sqrt{3}/2} \sqrt{3-4x^2} dx = \frac{1}{2} \left[2x \sqrt{3-4x^2} + 3 \arcsin \frac{2}{\sqrt{3}}x \right]_0^{\sqrt{3}/2}$$

$$= \frac{1}{2} \left[3 \arcsin 1 \right] = \frac{3}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \underline{\underline{\frac{3}{4}\pi}}$$

$$d) \int_0^4 |x^2 - 4x + 3| dx$$

Notiamo che $x^2 - 4x + 3 = (x-3)(x-1)$, e quindi



Si ha

$$\begin{aligned}
 \int_0^4 |x^2 - 4x + 3| dx &= \int_0^1 (x^2 - 4x + 3) dx - \int_1^3 (x^2 - 4x + 3) dx + \int_3^4 (x^2 - 4x + 3) dx \\
 &= \left[\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x \right]_0^1 - \left[\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x \right]_1^3 + \left[\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x \right]_3^4 \\
 &= \left(\frac{1}{3} - 2 + 3 \right) - \left[\left(\frac{27}{3} - 18 + 9 \right) - \left(\frac{1}{3} - 2 + 3 \right) \right] + \left[\left(\frac{64}{3} - 32 + 12 \right) - \left(\frac{27}{3} - 18 + 9 \right) \right] \\
 &= \frac{8}{3} + \frac{4}{3} = \underline{\underline{4}}.
 \end{aligned}$$

□

$$c) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{(x-1)(x^2+1)} dx.$$

La funzione integranda è una funzione razionale. Dobbiamo determinare le costanti $a, b, c \in \mathbb{R}$ tali che

$$\frac{x}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{a}{x-1} + \frac{bx+c}{x^2+1}.$$

$$\text{Risulta } x = a(x^2+1) + (bx+c)(x-1) \Leftrightarrow$$

$$x = (a+b)x^2 + (-b+c)x + (a-c) \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} a+b=0 \\ -b+c=1 \\ a-c=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=c=\frac{1}{2} \\ b=-\frac{1}{2} \end{cases}$$

Quindi

$$\begin{aligned}
 \int \frac{x}{(x-1)(x^2+1)} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{1}{x-1} dx + \frac{1}{2} \int \frac{-x+1}{x^2+1} dx \\
 &= \frac{1}{2} \log|x-1| - \frac{1}{4} \int \frac{2x}{x^2+1} dx + \frac{1}{2} \int \frac{1}{x^2+1} dx \\
 &= \frac{1}{2} \log|x-1| - \frac{1}{4} \log(x^2+1) + \frac{1}{2} \arctan x + c.
 \end{aligned}$$

Si ha allora

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{(x-1)(x^2+1)} dx &= \left[\frac{1}{2} \log|x-1| - \frac{1}{4} \log(x^2+1) + \frac{1}{2} \arctan x \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \\
 &= \frac{1}{2} \log\left|\frac{\pi}{4}-1\right| - \frac{1}{4} \log\left(\frac{\pi^2}{16}+1\right) + \frac{1}{2} \arctan \frac{\pi}{4} = \underline{\underline{\frac{1}{2} \log\left(\frac{4-\pi}{4}\right) - \frac{1}{4} \log\left(\frac{\pi^2+16}{16}\right) + \frac{1}{2} \arctan \frac{\pi}{4}}}}.
 \end{aligned}$$

Es. 7. Dire per quali $\alpha \in \mathbb{R}$, i seguenti integrali impropri convergono

a) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\arctan x}{|x|^\alpha} dx$: Poniamo $f(x) = \frac{\arctan x}{|x|^\alpha}$ su $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. È una funzione continua e dispari.

Basta studiare la convergenza dell'integrale $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^\alpha} dx$.

Notiamo che :

per $x \rightarrow 0^+$ $f(x) \sim \frac{x}{x^\alpha} = \frac{1}{x^{\alpha-1}}$ e quindi l'integrale converge in un intorno destro di $x=0$ se $\alpha-1 < 1$, ossia $\alpha < 2$;

per $x \rightarrow +\infty$ $f(x) \sim \frac{\frac{\pi}{2}}{x^\alpha} = \frac{\pi}{2x^\alpha}$. L'integrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx < +\infty$ se e solo se $\alpha > 1$ e quindi per il criterio del confronto asintotico $\int_1^{+\infty} f(x) dx < +\infty \Leftrightarrow \alpha > 1$.

Pertanto $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^\alpha} dx$ è convergente se e solo se $\alpha \in]1, 2[$, e

l'integrale improprio dato è convergente se e solo se $\alpha \in]1, 2[$. $\square$

b) $\int_0^3 \frac{1}{x^3(e^x-1)^{2\alpha}} dx$: posto $f(x) = \frac{1}{x^3(e^x-1)^{2\alpha}}$ su $]0, 3]$, f è continua e positiva.

Oss. che $f(x) \sim \frac{1}{x^3 \cdot x^{2\alpha}}$ per $x \rightarrow 0^+$.

Poiché $\int_0^3 \frac{1}{x^{2\alpha+3}} dx < +\infty \Leftrightarrow 2\alpha+3 < 1 \Leftrightarrow \alpha < -1$, per il criterio del confronto asintotico possiamo concludere che l'integrale improprio dato è convergente se e solo se $\alpha < -1$. $\square$

c) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{[\log(2^x+5)]^\alpha} dx$: posto $f(x) = \frac{1}{[\log(2^x+5)]^\alpha}$ su $[1, +\infty[$, f è continua e positiva. Inoltre $f(x) = \frac{1}{[\log[2^x(1+\frac{5}{2^x})]]^\alpha} = \frac{1}{[\log 2^x + \log(1+\frac{5}{2^x})]^\alpha}$

$$= \frac{1}{[x \log 2 + \log(1+\frac{5}{2^x})]^\alpha} \sim \frac{1}{[x \log 2]^\alpha} \text{ per } x \rightarrow +\infty.$$

Poiché $\int_1^{+\infty} \frac{1}{(x \log x)^d} dx < +\infty$ se e solo se $d > 1$, per il criterio del confronto asintotico possiamo concludere che l'integrale improprio dato è convergente se e solo se $d > 1$. $\square$

Es. 8. Stabilire il comportamento dei seguenti integrali impropri:

a) $\int_0^{\pi} \frac{\cos x}{\sqrt[3]{\sin x}} dx$: posto $f(x) = \frac{\cos x}{\sqrt[3]{\sin x}}$ su $]0, \pi[$, si ha che

f è continua. Inoltre

per $x \rightarrow 0^+$ $f(x) \sim \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ e quindi l'integrale converge

in un intorno destro di $x=0$;

per $x \rightarrow \pi^-$ $f(x) \sim \frac{-1}{\sqrt[3]{\pi-x}}$ $\sin x = -(x-\pi)^+$
 $\cos((x-\pi)^+)$
per $x \rightarrow \pi$

e quindi l'integrale converge in un intorno

sinistro di $x=\pi$.

In conclusione, l'integrale improprio dato risulta convergente.

Osserviamo che

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \frac{\cos x}{\sqrt[3]{\sin x}} dx &= \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sqrt[3]{\sin x}} dx + \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{\cos x}{\sqrt[3]{\sin x}} dx = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon}^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sqrt[3]{\sin x}} dx + \lim_{\beta \rightarrow \pi^-} \int_{\pi/2}^{\beta} \frac{\cos x}{\sqrt[3]{\sin x}} dx \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left. \frac{3}{2} [\sin x]^{2/3} \right|_{\varepsilon}^{\pi/2} + \lim_{\beta \rightarrow \pi^-} \left. \frac{3}{2} [\sin x]^{2/3} \right|_{\pi/2}^{\beta} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[\frac{3}{2} - \frac{3}{2} (\sin \varepsilon)^{2/3} \right] + \lim_{\beta \rightarrow \pi^-} \left[\frac{3}{2} [\sin \beta]^{2/3} - \frac{3}{2} \right] = \underline{\underline{0}}. \end{aligned}$$

$\square$

b) $\int_2^{+\infty} \frac{\sin\left(\frac{x^2}{x^3+3}\right)}{\log^7 x} dx$: posto $f(x) = \frac{\sin\left(\frac{x^2}{x^3+3}\right)}{\log^7 x}$ su $[2, +\infty[$, si ha

che f è continua. Inoltre, per $x \rightarrow +\infty$,

$$f(x) = \frac{\sin\left(\frac{x^2}{x^3+3}\right)}{\log^7 x} \sim \frac{\frac{1}{x}}{\log^7 x} = \frac{1}{x \log^7 x} \quad \text{Ora}$$

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x \log^7 x} dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{\log^{-6} x}{-6} \right]_2^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{-6 \log^6 n} + \frac{1}{6 \log^6 2} \right] = \frac{1}{6 \log^6 2} < +\infty$$

Per il criterio del confronto asintotico si può concludere che l'integrale improprio di partenza è convergente. ■

Es. 9. Studiate la funzione integrale

$$F(x) = \int_0^x \frac{(t+1)(t-13)}{\log(2+t^2)} dt$$

Poniamo $f(t) = \frac{(t+1)(t-13)}{\log(2+t^2)}$: è una funzione continua su tutto $\mathbb{R}$

e dom F = $\mathbb{R}$.

$$\text{Notiamo che } \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \int_0^x \frac{(t+1)(t-13)}{\log(2+t^2)} dt = - \int_{-\infty}^0 \frac{(t+1)(t-13)}{\log(2+t^2)} dt$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x \frac{(t+1)(t-13)}{\log(2+t^2)} dt = \int_0^{+\infty} \frac{(t+1)(t-13)}{\log(2+t^2)} dt$$

Oss. che

$$f(t) \rightarrow +\infty \text{ per } t \rightarrow \pm\infty$$

in particolare $f(t) > 1$ per $t \geq \bar{t}$ ($0 < \bar{t} < \tilde{t}$), quindi

$$\begin{aligned} - \int_{-\infty}^0 f(t) dt &= \lim_{x \rightarrow -\infty} - \int_x^0 f(t) dt = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[- \int_x^{\tilde{t}} f(t) dt - \int_{\tilde{t}}^0 f(t) dt \right] = \\ &\leq \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[- \int_x^{\tilde{t}} 1 dt - \int_{\tilde{t}}^0 f(t) dt \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[(x - \tilde{t}) - \int_{\tilde{t}}^0 f(t) dt \right] = -\infty, \end{aligned}$$

$$\text{ossia } \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = \underline{-\infty} \quad \text{e}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} f(t) dt &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x f(t) dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\int_0^{\bar{t}} f(t) dt + \int_{\bar{t}}^x f(t) dt \right] = \\ &\geq \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\int_0^{\bar{t}} f(t) dt + \int_{\bar{t}}^x 1 dt \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\int_0^{\bar{t}} f(t) dt + (x - \bar{t}) \right] = +\infty, \end{aligned}$$

$$\text{ossia } \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \underline{+\infty}.$$

Essendo $f(t)$ continua in $\mathbb{R}$, per il Teorema fond. del calcolo integrale risulta che $F(x)$ è continua e derivabile; inoltre

$$F'(x) = f(x) \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}.$$

Oss. che $F'(x) = 0 \Leftrightarrow \underline{x = -11, x = 13}$ pt. critici per $F(x)$.



Dalla monotonia di $F(x)$ segue che $x = -11$ è pt. di max. loc. (stretto) per F
mentre $x = 13$ è pt. di min. loc. (stretto) per F .

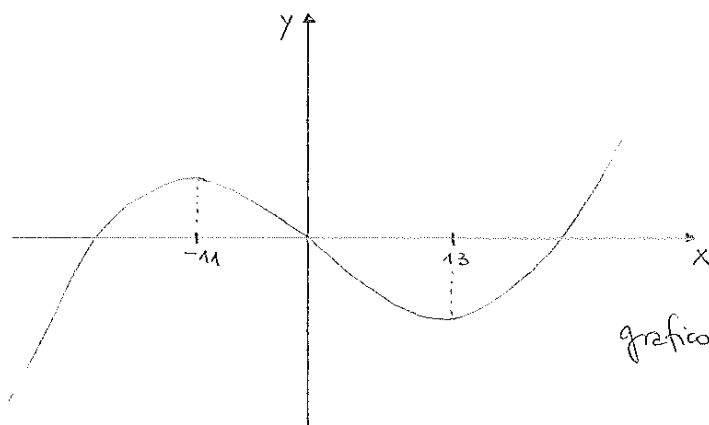


grafico qualitativo di $F(x)$



Determinare per quali $\alpha > 0$ esiste finito il limite

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^x \frac{(t+11)(t-13)}{\log(2+t^2)} dt}{\sin x^\alpha - x}.$$

Il limite da studiare si presenta nella forma $\frac{0}{0}$. Osserviamo che

$$\frac{F'(x)}{(\sin x^\alpha - x)'} = \frac{\frac{(x+11)(x-13)}{\log(2+x^2)}}{\alpha x^{\alpha-1} \cos x^\alpha - 1} = \frac{(x+11)(x-13)}{\log(2+x^2) [\alpha x^{\alpha-1} \cos x^\alpha - 1]} \stackrel{=}{=} I_\alpha$$

Ora, se

$$\underline{\alpha > 1}$$

$$I_\alpha \rightarrow \frac{-143}{(\log 2)(-1)} = \frac{143}{\log 2}$$

$$\underline{\alpha = 1}$$

$$I_\alpha = \frac{(x+11)(x-13)}{\log(2+x^2) \left[-\frac{x^2}{2} + o(x^4) \right]} \rightarrow +\infty$$

$$\underline{0 < \alpha < 1}$$

$$I_\alpha = \frac{(x+11)(x-13)}{\log(2+x^2) \left[\underbrace{\alpha x^{\alpha-1}}_{\rightarrow +\infty} \cos x^\alpha - 1 \right]} \rightarrow 0$$

Applicando il teorema di de l'Hopital si può concludere che il limite dato vale

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{F(x)}{\ln x^d - x} = \begin{cases} \frac{143}{\log 2} & \text{se } d > 1 \\ +\infty & \text{se } d = 1 \\ 0 & \text{se } 0 < d < 1, \end{cases}$$

quindi il limite esiste finito per $d \in]0, 1[\cup]1, +\infty[$.

Es. 10. Determinare l'integrale generale delle seg. eq. diff.

a) $y' + 2xy = x$ $y' = \frac{-2xy}{a(x)} + \frac{x}{b(x)}$ eq. diff. lineare del 1° ordine a coeff. variabili

$a(x) = -2x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funz. continua
 $b(x) = x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ "

Notiamo che $A(x) = \int a(x) dx = -x^2$ è una primitiva di $a(x)$

e la formula risolutiva è

$$\begin{aligned} y(x) &= e^{A(x)} \left(c + \int_{x_0=0}^x b(t) e^{-A(t)} dt \right) \quad \text{scelto arbitrariamente nel dominio di } a(x), b(x). \\ &= e^{-x^2} \left(c + \int_0^x t e^{t^2} dt \right) = e^{-x^2} \left(c + \frac{1}{2} \int_0^x (2t) e^{t^2} dt \right) \\ &= e^{-x^2} \left(c + \frac{1}{2} e^{x^2} \right) \quad \text{dove la costante } c \text{ è arbitraria} \\ &\quad \text{e può cambiare passando da} \\ &\quad \text{una espressione all'altra.} \end{aligned}$$

Si ha $y(x) = \frac{1}{2} + c e^{-x^2}$ al variare di $c \in \mathbb{R}$. □

b) $3y' + y = 2e^{-x}$ $y' = -\frac{1}{3}y + \frac{2}{3}e^{-x}$ eq. diff. lineare del 1° ordine a coeff. variabili

$a(x) = -\frac{1}{3} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ } continue
 $b(x) = \frac{2}{3}e^{-x} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ }

Notiamo che $A(x) = \int -\frac{1}{3} dx = -\frac{1}{3}x$ è una primitiva di $a(x)$

e la formula risolutiva ci dà

$$\begin{aligned}
 y(x) &= e^{-\frac{1}{3}x} \left(c + \int_{x_0=0}^x \frac{2}{3} e^{-t} e^{\frac{1}{3}t} dt \right) \quad \text{scelto arbitrariamente nel dominio di } a(x), b(x) \\
 &= e^{-\frac{1}{3}x} \left(c + \int_0^x \frac{2}{3} e^{-\frac{2}{3}t} dt \right) = e^{-\frac{1}{3}x} \left(c - e^{-\frac{2}{3}x} \right) \\
 &\quad \text{con } c \in \mathbb{R}
 \end{aligned}$$

Si ha $y(x) = -e^{-x} + ce^{-\frac{1}{3}x}$ al variare di $c \in \mathbb{R}$.

c) $yy' = x$ è un'eq. diff. a variabile separabile

Abbiamo $\left(\frac{1}{2}y^2\right)' = \left(\frac{x^2}{2}\right)'$

e quindi

$$\frac{1}{2}y^2(x) = \frac{x^2}{2} + c, \quad \text{al variare di } c \in \mathbb{R},$$

ne segue

$$y^2(x) = x^2 + c, \quad \text{al variare di } c \in \mathbb{R}.$$

Quindi abbiamo due possibili soluzioni

$$\underline{y(x) = \pm \sqrt{x^2 + c}} \quad \text{al variare di } c \in \mathbb{R}. \quad \square$$

d) $y'' + 4y = \sin 2x$ è un'eq. diff. del 2° ordine lineare a coeff. costanti completa.

• Determiniamo innanzitutto l'integrale generale dell'eq. diff.

omogenea $y'' + 4y = 0$.

La sua eq. caratteristica associata è $z^2 + 4 = 0$, le cui soluzioni sono $z_1 = -2i$ e $z_2 = 2i$

La soluzione generale (o integrale generale) dell'eq. diff. omogenea $y'' + 4y = 0$ è data quindi da

$$y(x) = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x, \quad \text{al variare di } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

• Cerchiamo una soluzione particolare dell'eq. diff. completa

con $f(x) = \sin 2x$ del tipo $\bar{y}(x) = kx \cos 2x + h x \sin 2x$

con h e k da determinare (nota: $f(x) = e^{ax} \sin bx$ con $a=0, b=2$)

e $z = \underset{0}{a} + i \underset{2}{b}$ è soluzione dell'eq. caratteristica e quindi la soluzione particolare non è solo una combinazione lineare di $\cos 2x$ e $\sin 2x$, ma è del tipo $\bar{y}(x)$.

$$\begin{aligned}\text{Ora } \bar{y}'(x) &= k \cos 2x - 2kx \sin 2x + h \sin 2x + 2hx \cos 2x \\ \bar{y}''(x) &= -2k \sin 2x - 2k \sin 2x - 4kx \cos 2x + 2h \cos 2x + 2h \cos 2x \\ &\quad - 4hx \sin 2x \\ &= -4k \sin 2x + 4h \cos 2x - 4kx \cos 2x - 4hx \sin 2x\end{aligned}$$

e quindi $\bar{y}'' + 4\bar{y} = \sin 2x$ se e solo se

$$\begin{aligned}-4k \sin 2x + 4h \cos 2x - \cancel{4kx \cos 2x} - \cancel{4hx \sin 2x} + \cancel{4kx \cos 2x} + \cancel{4hx \sin 2x} &= \\ &= \sin 2x\end{aligned}$$

se e solo se $-4k = 1$, $4h = 0$,

e la soluzione particolare risulterà $\bar{y}(x) = -\frac{1}{4}x \cos 2x$.

L'integrale generale ricercato risulta allora

$$\underline{y(x) = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x - \frac{1}{4}x \cos 2x} \quad \text{al variare di } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

□

e) $y'' + 9y = x^2 e^{3x} + \cos 3x$ è un'eq. diff. del 2° ordine lineare a coeff. costanti completa.

• Determiniamo innanzitutto l'integrale generale dell'eq. diff. omogenea

$$y'' + 9y = 0.$$

La sua eq. caratteristica associata è $z^2 + 9 = 0$, le cui soluzioni sono

$z_1 = -3i$ e $z_2 = 3i$. La soluzione generale (o integrale generale)

dell'eq. diff. omogenea $y'' + 9y = 0$ è data quindi da

$$y(x) = c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x, \quad \text{al variare di } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

• Cerchiamo una soluzione particolare dell'eq. diff. $y'' + 9y = x^2 e^{3x}$ del tipo $\bar{y}_1(x) = (ax^2 + bx + c)e^{3x}$ con a, b, c da determinare.

Si ha $\bar{y}_1'(x) = (2ax+b)e^{3x} + 3(ax^2+bx+c)e^{3x}$

$$\bar{y}_1''(x) = 2ae^{3x} + 3(2ax+b)e^{3x} + 3(2ax+b)e^{3x} + 9(ax^2+bx+c)e^{3x}.$$

Quindi

$$\bar{y}_1'' + 9\bar{y}_1 = x^2 e^{3x} \Leftrightarrow [9ax^2 + (9b+12a)x + (9c+6b+2a)]e^{3x} + (9ax^2+9bx+9c)e^{3x} = x^2 e^{3x}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 18a = 1 \\ 9b+12a+9b = 0 \\ 9c+6b+2a+9c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{18} \\ b = -\frac{1}{27} \\ c = \frac{1}{162} \end{cases}$$

e si ha $\bar{y}_1(x) = \left(\frac{1}{18}x^2 - \frac{1}{27}x + \frac{1}{162}\right)e^{3x}$.

- Cerchiamo una soluzione particolare dell'eq. diff. $y'' + 9y = \cos 3x$ del tipo $\bar{y}_2(x) = kx \cos 3x + hx \sin 3x$ con h e k da determinare (nota: $f(x) = e^{ax} \cos bx$ con $a=0, b=3$ e $z = \underset{0}{a} + i \underset{3}{b}$ è soluzione dell'eq. caratteristica e quindi la soluzione particolare non è solo una combinazione lineare di $\cos 3x$ e $\sin 3x$, ma è del tipo $\bar{y}_2(x)$).

Ora

$$\bar{y}_2'(x) = k \cos 3x - 3kx \sin 3x + h \sin 3x + 3hx \cos 3x$$

$$\begin{aligned} \bar{y}_2''(x) &= -3k \sin 3x - 3k \sin 3x - 9kx \cos 3x + 3h \cos 3x + 3h \cos 3x - 9hx \sin 3x \\ &= -6k \sin 3x + 6h \cos 3x - 9kx \cos 3x - 9hx \sin 3x \end{aligned}$$

e quindi

$$\begin{aligned} \bar{y}_2'' + 9\bar{y}_2 &= \cos 3x \Leftrightarrow -6k \sin 3x + 6h \cos 3x - \cancel{9kx \cos 3x} - \cancel{9hx \sin 3x} + \\ &\quad + \cancel{9kx \cos 3x} + \cancel{9hx \sin 3x} = \cos 3x \end{aligned}$$

se e solo se $-6k = 0, 6h = 1,$

e la soluzione particolare si scrive $\bar{y}_2(x) = \frac{1}{6}x \sin 3x$.

- In definitiva, la soluzione generale dell'eq. diff. completa data è

$$\underline{y(x) = c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x + \left(\frac{1}{18}x^2 - \frac{1}{27}x + \frac{1}{162}\right)e^{3x} + \frac{1}{6}x \sin 3x, c_1, c_2 \in \mathbb{R}.}$$

□

Es. 11. Risolvere i seg. problemi di Cauchy:

$$a) \begin{cases} y' + \frac{1}{x} y = 2 \log x & x > 0 \\ y(1) = 0. \end{cases}$$

Abbiamo $y' = -\frac{1}{x} y + 2 \log x$; la formula risolutiva ci dà

$$y(x) = e^{-\log x} \left(c + \int_1^x 2(\log t) e^{\log t} dt \right)$$

$$= \frac{1}{x} \left(c + \int_1^x 2(\log t) t dt \right).$$

$$= \frac{1}{x} \left(c + x^2 \log x - \frac{x^2}{2} \right) \quad \int 2t \log t dt = t^2 \log t - \int t^2 \cdot \frac{1}{t} dt = t^2 \log t - \frac{t^2}{2} + c$$

Imponendo $y(1) = 0$ si ha

$$0 = \left(c - \frac{1}{2} \right)$$

e quindi $c = \frac{1}{2}$.

La soluzione del pblm. di Cauchy dato è quindi

$$y(x) = \frac{1}{x} \left(\frac{1}{2} + x^2 \log x - \frac{x^2}{2} \right), \text{ ossia}$$

$$\underline{y(x) = x \log x - \frac{x}{2} + \frac{1}{2x}}, \quad x > 0$$

□

$$b) \begin{cases} y' = \frac{x^2}{1+x^2} y^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Abbiamo $y' = \frac{x^2}{1+x^2} y^2$. Notiamo che $y \equiv 0$ è soluzione dell'eq. diff.

data ma essa non soddisfa il dato $y(0) = 1$. Ogni altra soluzione dell'eq.

non si annulla mai, e quindi possiamo considerare l'eq. diff. equiv.

$$\frac{y'(x)}{y^2(x)} = \frac{x^2}{1+x^2}.$$

$$\begin{aligned} \text{Abbiamo } \left(-\frac{1}{y(x)} \right)' &= \frac{x^2+1}{x^2+1} - \frac{1}{x^2+1} = 1 - \frac{1}{1+x^2} \\ &= (x - \arctan x)' \end{aligned}$$

$$\text{quindi } -\frac{1}{y(x)} = x - \arctan x + c$$

quindi $y(x) = \frac{1}{-x + \arctan x + c}$.

Imponiamo $y(0) = 1$, ossia $1 = \frac{1}{c}$, quindi $c = 1$.

Abbiamo dunque

$y(x) = \frac{1}{-x + \arctan x + 1}$ su un intervallo I contenente $x_0 = 0$. $\square$

c)
$$\begin{cases} y'' + 9y = 6 \cos 3x \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = -3 \end{cases}$$

Procedendo come in Es.10 e) si ottiene subito che la soluzione generale dell'eq. $y'' + 9y = 6 \cos 3x$ è data da

$$y(x) = c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x + x \sin 3x, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Ora $y'(x) = -3c_1 \sin 3x + 3c_2 \cos 3x + \sin 3x + 3x \cos 3x$

per cui $y(0) = 0$ e $y'(0) = -3$ se e solo se

$$\begin{aligned} 0 &= y(0) = c_1 & \Rightarrow c_1 &= 0 \\ -3 &= y'(0) = 3c_2 & \Rightarrow c_2 &= -1. \end{aligned}$$

La soluzione del pbm. di Cauchy dato è quindi $y(x) = (x-1) \sin 3x$, $x \in \mathbb{R}$. $\square$

d)
$$\begin{cases} y'' - 3y' + 2y = 2e^{3x} \\ y(0) = 3 \\ y'(0) = 6 \end{cases}$$

Cerchiamo prima l'integrale generale dell'eq. diff. $y'' - 3y' + 2y = 2e^{3x}$.

• Determiniamo innanzitutto l'integrale generale dell'eq. diff. omogenea

$$y'' - 3y' + 2y = 0.$$

La sua eq. caratteristica associata è $z^2 - 3z + 2 = 0$, le cui soluzioni

sono $z=1$ e $z=2$. La soluzione generale (o integrale generale) dell'eq. diff. omogenea $y'' - 3y' + 2y = 0$ è data quindi da

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{2x} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

- Cerchiamo una soluzione particolare dell'eq. diff. completa del tipo

$$\bar{y}(x) = h e^{3x} \quad \text{con } h \text{ da determinare.}$$

Poiché $\bar{y}'(x) = 3h e^{3x}$ e $\bar{y}''(x) = 9h e^{3x}$ si ha che

$$\bar{y}'' - 3\bar{y}' + 2\bar{y} = 2e^{3x} \Leftrightarrow \cancel{9h e^{3x}} - \cancel{9h e^{3x}} + 2h e^{3x} = 2e^{3x}$$

$$\Leftrightarrow h = 1.$$

In conclusione, la soluzione generale dell'eq. diff. completa data è

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + e^{3x}, \quad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Poiché $y'(x) = c_1 e^x + 2c_2 e^{2x} + 3e^{3x}$ si ha che $y(x)$ risolve il pbm. di Cauchy dato se e solo se

$$\begin{cases} 3 = y(0) = c_1 + c_2 + 1 \\ 6 = y'(0) = c_1 + 2c_2 + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 = 2 \\ c_1 + 2c_2 = 3 \end{cases}$$

da cui $c_1 = 1$, $c_2 = 1$. La soluzione ricercata è dunque

$$\underline{\underline{y(x) = e^x + e^{2x} + e^{3x} \quad x \in \mathbb{R}.}}$$

