E10

1) i) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{x}{\sqrt[3]{(x^2+4)^4}}\,dx = \lim_{M\to+\infty} \int_2^{M} \frac{x}{\sqrt[3]{(x^2+4)^4}}\,dx = \boxed{\frac{3}{4}}$.

Notiamo infatti che $\forall M \geq 2$

$$\int_2^M \frac{x}{(x^2+4)^{4/3}}\,dx = \frac{1}{2}\int_2^M 2x\,(x^2+4)^{-4/3}\,dx = \left[\frac{1}{2}\,\frac{(x^2+4)^{-1/3}}{-1/3}\right]_2^M =$$

$$= \left(-\frac{3}{2}\,\frac{1}{\sqrt[3]{M^2+4}} + \frac{3}{2\sqrt[3]{8}}\right).$$

Quindi

$$\lim_{M\to+\infty}\left[-\frac{3}{2}\,\frac{1}{\sqrt[3]{M^2+4}} + \frac{3}{4}\right] = \frac{3}{4}.$$

□

ii) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}\,dx = \lim_{M\to+\infty}\int_1^M \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}\,dx = \boxed{\frac{3\pi^2}{32}}$.

Notiamo infatti che $\forall M \geq 1$

$$\int_1^M \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}\,dx = \left[\frac{\operatorname{arctg}^2 x}{2}\right]_1^M = \frac{\operatorname{arctg}^2 M}{2} - \frac{\operatorname{arctg}^2 1}{2}$$

$$= \frac{\operatorname{arctg}^2 M}{2} - \frac{\pi^2}{32}.$$

Quindi

$$\lim_{M\to+\infty}\left[\frac{\operatorname{arctg}^2 M}{2} - \frac{\pi^2}{32}\right] = \frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi^2}{32} = \frac{3\pi^2}{32}.$$

□

iii) $\displaystyle\int_{1/4}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(4x+1)}\,dx = \lim_{M\to+\infty}\int_{1/4}^{M} \frac{1}{\sqrt{x}(4x+1)} = \boxed{\frac{\pi}{4}}$.

Osserviamo che $\forall M \geq 1/4$

$$\int_{1/4}^M \frac{1}{\sqrt{x}(4x+1)}\,dx = \Big[\operatorname{arctg}(2\sqrt{x})\Big]_{1/4}^M = \operatorname{arctg}(2\sqrt{M}) - \operatorname{arctg} 1$$

Quindi

$$\lim_{M\to+\infty}\Big[\operatorname{arctg}(2\sqrt{M}) - \operatorname{arctg} 1\Big] = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

■

2) i) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\log(1+\sqrt[3]{x})}{\operatorname{tg} x}\,dx$: Osserviamo che $f(x) = \dfrac{\log(1+\sqrt[3]{x})}{\operatorname{tg} x}$ in $]0,1]$ è una funzione positiva e continua.

Inoltre $\frac{\log(1+\sqrt[3]{x})}{\operatorname{tg} x} \sim \frac{\sqrt[3]{x}}{x} = \frac{1}{x^{2/3}}$ per $x \to 0^+$.

Poiché $\int_0^1 \frac{1}{x^{2/3}}\,dx < +\infty$, per il criterio del confronto asintotico anche l'integrale di partenza è convergente. $\square$

ii) $\int_3^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2-2}\,\sqrt{3x+1}}\,dx$: Osserviamo che $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-2}\sqrt{3x+1}}$ è ben definita su $[3,+\infty[$, continua e positiva. Quindi l'unico punto da indagare è come f si comporta quando $x \to +\infty$. Ora $f(x) \sim \frac{\cancel{x}^{1}}{\cancel{x}\sqrt{x}\cdot\sqrt{3}}$ per $x \to +\infty$.

Poiché l'integrale $\int_3^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ è divergente, anche l'integrale di partenza è divergente per il criterio del confronto asintotico. $\blacksquare$

3) i) $\int_0^{+\infty} \frac{1-e^{-x^2}}{[x(x+1)]^\alpha}\,dx$: oss. che $f(x) = \frac{1-e^{-x^2}}{[x(x+1)]^\alpha} > 0$ su $]0,+\infty[$; inoltre è continua. Notiamo che:

per $x \to +\infty$, $f(x) \sim \frac{1}{x^{2\alpha}}$ (nota: $e^{-x^2} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$). Poiché $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{2\alpha}}\,dX < +\infty \iff 2\alpha > 1$, ossia $\alpha > \frac{1}{2}$, per il criterio del confronto asintotico $\int^{+} f(x)\,dx < +\infty$ se e solo se $\alpha > \frac{1}{2}$;

per $x \to 0^+$, $f(x) = \frac{\cancel{1}-\cancel{1}+x^2+o(x^2)}{x^\alpha (x+1)^\alpha}{}^{1} \sim \frac{1}{x^{\alpha-2}}$ (nota: $(x+1)^\alpha \xrightarrow[x\to 0]{} 1$).

Poiché $\int_0^1 \frac{1}{x^{\alpha-2}}\,dx < +\infty \iff \alpha - 2 < 1$, ossia $\alpha < 3$, per il criterio del confronto asintotico $\int_0^1 f(x)\,dx < +\infty \iff \alpha < 3$.

In conclusione, $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx < +\infty \iff \boxed{\frac{1}{2} < \alpha < 3}$. $\square$

E10

ii) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x+\operatorname{arctg}\sqrt{x}}{|x+1|^\alpha\, x^{2\alpha}}\,dx$: oss. che $f(x)=\dfrac{x+\operatorname{arctg}\sqrt{x}}{|x+1|^\alpha\, x^{2\alpha}}>0$ su $]0,+\infty[$,

ed è continua. Notiamo che:

per $x\to+\infty$, $f(x)\sim\dfrac{x}{x^{3\alpha}}$ (nota: $\operatorname{arctg}\sqrt{x}\underset{x\to+\infty}{\to}\frac{\pi}{2}$). Poiché

$\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^{3\alpha-1}}\,dx<+\infty \iff 3\alpha-1>1$, ossia $\alpha>2/3$, per il

criterio del confronto asintotico $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\,dx<+\infty \iff \alpha>2/3$;

per $x\to0^+$, $f(x)=\dfrac{x+\sqrt{x}+o(x^{1/2})}{x^{2\alpha}}\sim\dfrac{1}{x^{2\alpha-1/2}}$ (nota: $|x+1|^\alpha\underset{x\to0}{\to}1$).

Poiché $\displaystyle\int_0^1\frac{1}{x^{2\alpha-1/2}}\,dx<+\infty \iff 2\alpha-1/2<1$, ossia $\alpha<3/4$,

per il criterio del confronto asintotico $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx<+\infty \iff \alpha<3/4$.

In conclusione, $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,dx<+\infty \iff \boxed{\frac{2}{3}<\alpha<\frac{3}{4}}$. □

iii) $\displaystyle\int_{-\infty}^{0}\frac{\operatorname{arctg}\sqrt{|x|}}{|x-1|^{3\alpha}\,|x|^{\alpha+1}}\,dx$: Oss. che $f(x)=\dfrac{\operatorname{arctg}\sqrt{|x|}}{|x-1|^{3\alpha}\,|x|^{\alpha+1}}>0$ su $]-\infty,0[$;

inoltre è continua. Notiamo che:

per $x\to-\infty$, $f(x)\sim\dfrac{\pi}{2\,|x|^{4\alpha+1}}$. Poiché $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1}\frac{1}{|x|^{4\alpha+1}}\,dx<+\infty$

se e solo se $4\alpha+1>1$, ossia $\alpha>0$, per il criterio del confronto asintotico $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} f(x)\,dx<+\infty \iff \alpha>0$;

per $x\to0^-$, $f(x)=\dfrac{\sqrt{|x|}+o(\sqrt{|x|})}{|x|^{\alpha+1}}\sim\dfrac{1}{|x|^{\alpha+1/2}}$ (nota: $|x-1|^{3\alpha}\underset{x\to0^+}{\to}1$)

Poiché $\displaystyle\int_{-1}^{0}\frac{1}{|x|^{\alpha+1/2}}\,dx<+\infty \iff \alpha+\frac{1}{2}<1$, ossia $\alpha<\frac{1}{2}$,

per il criterio del confronto asintotico $\displaystyle\int_{-1}^{0} f(x)\,dx<+\infty \iff$ $\alpha<\dfrac{1}{2}$.

In conclusione, $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx<+\infty \iff \boxed{0<\alpha<\frac{1}{2}}$. □

iv) $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{1-\cos\sqrt{x}}{\sqrt[4]{(x-x^2)^\alpha}}\,dx = \int_0^{1/2} \frac{1-\cos\sqrt{x}}{\sqrt[4]{[x(1-x)]^\alpha}}\,dx$

Poniamo $f(x) = \dfrac{1-\cos\sqrt{x}}{\sqrt[4]{[x(1-x)]^\alpha}}$; è >0 su $]0,\frac{1}{2}]$ ed è continua. Notiamo che

per $x\to 0^+$, $f(x) = \dfrac{\cancel{1}-\cancel{1}+(\sqrt{x})^2/2+o(x)}{x^{\alpha/4}(1-x)^{\alpha/4}} \sim \dfrac{1}{2\,x^{\alpha/4-1}}$.

Poiché $\displaystyle\int_0^{1/2}\frac{1}{x^{\alpha/4-1}}\,dx<+\infty \iff \frac{\alpha}{4}-1<1$, ossia $\alpha<8$, per il criterio del confronto asintotico $\displaystyle\int_0^{1/2} f(x)dx<+\infty \iff \boxed{\alpha<8}$.

4) $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x-1-\alpha\sin x}{x^2}\,dx$: Poniamo $f(x)=\dfrac{e^x-1-\alpha\sin x}{x^2}$, che è continua su $]0,1]$. Studiamo il suo comportamento per $x\to 0^+$: abbiamo $f(x)=\dfrac{\cancel{1}+x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)-\cancel{1}-\alpha x+o(x^2)}{x^2}$

$$=\frac{(1-\alpha)x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)}{x^2}.$$

Risulta allora che $f(x)\sim\frac{1}{x}$ se $\alpha\neq 1$; poiché $\int_0^1 \frac{1}{x}dx=+\infty$, l'integrale $\int_0^1 f(x)dx$ non è convergente per $\alpha\neq1$ per il criterio del confronto asintotico. Quindi l'integrale dato risulta convergente $\iff \alpha=1$ e può essere inteso come integrale di Riemann (definito per funzioni limitate su $]0,1]$). Si osservi che $f(x)=\dfrac{e^x-1-\sin x}{x^2}$ può essere definita su $[0,1]$ ponendo $f(0)=\lim_{x\to0^+}f(x)=\frac{1}{2}$.

5) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\log(1+x\sin x)-2+2\cos x}{7x^2\,(1-e^{x^2\sqrt{x}})}\,dx$: poiché $\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+o(x^3)$ per $x\to0$

$\cos x = 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}+o(x^4)$ "

$\log(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)$ "

si ha $\log(1+x\operatorname{sen}x) = \log\left(1+x^2-\frac{x^4}{6}+o(x^4)\right)$

$$= x^2 - \frac{x^4}{6} - \frac{1}{2}x^4 + o(x^4)$$
$$= x^2 - \frac{2}{3}x^4 + o(x^4) \qquad \text{per } x\to 0,$$

e

$$\log(1+x\operatorname{sen}x) - 2 + 2\cos x = \cancel{x^2} - \frac{2}{3}x^4 + o(x^4) - \cancel{2} + \cancel{2} - \cancel{x^2} + \frac{x^4}{12} + o(x^4)$$
$$= -\frac{7}{12}x^4 + o(x^4).$$

D'altra parte, poiché $e^x = 1 + x + o(x)$ per $x\to 0$, si ottiene

$$7x^2\left(1-e^{x^2\sqrt{x}}\right) = 7x^2\left(\cancel{1}-\cancel{1}-x^2\sqrt{x}+o(x^2\sqrt{x})\right)$$
$$= -7x^4\sqrt{x} + o(x^4\sqrt{x}).$$

Quindi, la funzione integranda $f(x) = \dfrac{\log(1+x\operatorname{sen}x)-2+2\cos x}{7x^2\left(1-e^{x^2\sqrt{x}}\right)}$ si comporta, per $x\to 0^+$, come

$$\frac{-\frac{7}{12}x^4 + o(x^4)}{-7x^4\sqrt{x}+o(x^4\sqrt{x})}, \quad \text{ossia} \quad \frac{1+o(1)}{12\sqrt{x}+o(\sqrt{x})}.$$

Inoltre, $e^x > 1 \quad \forall x>0$, dunque f è continua su $]0,1]$. Infine poiché $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx < +\infty$, per il criterio del confronto asintotico possiamo concludere che $\int_0^1 f(x)\,dx$ è convergente. ∎

6) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2+x+3}\,dx$: Notiamo che $|f(x)| = \dfrac{|\cos x|}{x^2+x+3}$ è una funzione continua, positiva su $[0,+\infty[$; notiamo che

$$0 < \int_0^{+\infty} \frac{|\cos x|}{x^2+x+3}\,dx \le \int_0^1 \frac{1}{x^2+x+3}\,dx + \int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2+x+3}\,dx$$

Poiché, per $x\to+\infty$, $\dfrac{1}{x^2+x+3} \sim \dfrac{1}{x^2}$ e $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}\,dx < +\infty$, per il criterio del confronto asintotico $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2+x+3}\,dx < +\infty$. D'altra parte $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^2+x+3}\,dx$ è l'integrale di Riemann di una funzione continua su $[0,1]$, quindi finito. Possiamo concludere che $f(x) = \dfrac{\cos x}{x^2+x+3}$ è assolut. integrab. su $[0,+\infty[$. ∎