

$$1) i) \quad y e^{2x} - (1+e^{2x})y' = 0$$

$$\Leftrightarrow y' (1+e^{2x}) = e^{2x} y$$

$$y' = \frac{e^{2x}}{1+e^{2x}} y ;$$

quest'eq. diff. possiamo considerarla come eq. diff. a variabile separabile oppure come eq. diff. del primo ordine a coeff. variabile come faremo. Possiamo usare la formula risolutiva per questo tipo di equazioni: sia

$$A(x) \text{ una primitiva di } a(x) = \frac{e^{2x}}{1+e^{2x}},$$

ossia

$$A(x) = \frac{1}{2} \log(1+e^{2x}) = \log \sqrt{1+e^{2x}};$$

e allora

$$\boxed{y(x) = c e^{A(x)} = c e^{\log \sqrt{1+e^{2x}}} = \boxed{c \sqrt{1+e^{2x}} \quad c \in \mathbb{R}}}$$

con $x \in \mathbb{R}$

□

$$ii) \quad \begin{cases} e^{x+y} y' + x = 0 \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Determiniamo innanzitutto l'integrale generale dell'eq. diff.

dato:

$$e^y y' = -x e^{-x}$$

$$\int x e^{-x} = -x e^{-x} + \int e^{-x} = -x e^{-x} - e^{-x}$$

Abbiamo

$$(e^{y(x)})' = (x e^{-x} + e^{-x})'$$

quindi

$$e^{y(x)} = x e^{-x} + e^{-x} + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Imponendo $y(0) = 0$ si ottiene

$$1 = e^0 = 1 + c, \text{ ossia } c = 0.$$

Risulta

$$\boxed{y(x) = \log\left(\frac{x+1}{e^x}\right) = \log(x+1) - x}$$

L'unica soluzione del probl. di Cauchy dato. Il più grande intervallo

In cui la soluzione del pnm. di Cauchy è definita e quindi

$$I = \{x \in \mathbb{R} : x+1 > 0\} =]-1, +\infty[.$$

□

iii) $\begin{cases} x^2 y' = -(y+1) \\ y(1) = e \end{cases}$ Osserviamo che $\circledast$ è equivalente al pnm. di Cauchy

$$\circledast \circledast \begin{cases} \frac{y'}{y+1} = -\frac{1}{x^2} \\ y(1) = e. \end{cases}$$

Infatti, oss. che $\tilde{y}(x) \equiv -1$ è soluz. dell'eq. diff. in $\circledast$, ma non soddisfa il dato iniziale $y(1) = e$. Per il teorema di Esistenza (locale) ed unicità del pnm. di Cauchy ogni altra soluzione $\hat{y}$ dell'eq. diff. in $\circledast$ non può assumere il valore -1 . (altrimenti esisterebbe $x_0 \in \mathbb{R}$ t.c. $\tilde{y}(x_0) = \hat{y}(x_0) = -1$ e $\tilde{y}, \hat{y}$ soluzioni dell'eq. diff. in $\circledast$. Impossibile!). Quindi la soluzione y di $\circledast$ non può passare per $x=0$ (ci sarebbe $0 \cdot y'(0) = -(y(0)+1) \neq 0$) e $\circledast$ risulta equivalente al pnm. di Cauchy $\circledast \circledast$.

Oss. ora che $\frac{y'}{y+1} = -\frac{1}{x^2} \iff (\log |y+1|)' = \left(\frac{1}{x}\right)'$, ossia $|y(x)+1| = k e^{\frac{1}{x}}$ $k > 0$.

Abbiamo quindi $y(x)+1 = k e^{\frac{1}{x}}$ $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Inoltre, possiamo includere anche la soluzione $y(x) \equiv -1$ permettendo $k=0$. In definitiva, $y(x) = -1 + k e^{\frac{1}{x}}$, $k \in \mathbb{R}$ sono tutte e solo le soluzioni dell'eq. diff. data. Imponendo $y(1) = e$ si ottiene $k = \frac{e+1}{e}$ e l'unica soluzione del pnm. di Cauchy dato risulta

$$y(x) = -1 + \left(\frac{e+1}{e}\right) e^{\frac{1}{x}} \quad x \in]0, +\infty[$$

2) i) a) $(1+x^2)y' + xy = \frac{1}{1+x^2} \iff y' = \frac{-x}{1+x^2} y + \frac{1}{(1+x^2)^2}$, un'eq. diff.

lineare del primo ordine con coeff. $a(x), b(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continui. Poiché

$$A(x) = \int a(x) dx = -\frac{1}{2} \log(1+x^2) = \log \frac{1}{\sqrt{1+x^2}},$$

$$y(x) = e^{\log \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}} \left(c + \int_0^x \frac{1}{(1+t^2)^2} e^{\log \sqrt{1+t^2}} dt \right) \quad c \in \mathbb{R}$$

scelto arbitrariamente in $\mathbb{R}$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \left(c + \int_0^x \frac{\sqrt{1+t^2}}{(1+t^2)^2} dt \right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \left(c + \int_0^x (1+t^2)^{-\frac{3}{2}} dt \right)$$

Ora basta notare che $\frac{d}{dt} \left(\frac{t}{\sqrt{t^2+1}} \right) = (t^2+1)^{-3/2}$ e mha

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \left(c + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \right) \text{ e infine}$$

$$\boxed{y(x) = \frac{c}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{x}{x^2+1} \text{ al variare di } c \in \mathbb{R}} \text{ con } x \in \mathbb{R}.$$

□

$$b) \quad 2y' - \frac{y}{\sqrt{x}} = x \quad y' = \frac{1}{2\sqrt{x}} y + \frac{x}{2}$$

Abbiamo un'eq. diff. lineare a coefficienti variabili: $a(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ funz. continua su $]0, +\infty[$
 $b(x) = \frac{x}{2}$ " " " "

$$\text{Osserviamo che } A(x) = \int a(x) dx = \int \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = \sqrt{x} \text{ e}$$

una primitiva di $a(x)$ e la formula risolutiva ci dà

$$y(x) = e^{\sqrt{x}} \left(c + \int_{\frac{1}{x}}^x \frac{t}{2} e^{-\sqrt{t}} dt \right), \quad c \in \mathbb{R}$$

$\frac{1}{x} \leftarrow$ scelto arbitrariamente in $]0, +\infty[$

$$= e^{\sqrt{x}} \left(c + \frac{1}{2} \int_1^x t e^{-\sqrt{t}} dt \right) =$$

$$= e^{\sqrt{x}} \left(c + (x\sqrt{x} - 3x - 6\sqrt{x} - 6) e^{-\sqrt{x}} \right),$$

$$\int t e^{-\sqrt{t}} dt = 2 \int s^3 e^{-s} ds$$

$\sqrt{t} = s \quad t = s^2$
 $dt = 2s ds$

$$2 \int s^3 e^{-s} ds =$$

$$\begin{aligned} &= 2 \left[s^3 \frac{e^{-s}}{-1} + \int 3s^2 e^{-s} ds \right] = \\ &= 2 \left[-s^3 e^{-s} - 3s^2 e^{-s} + \int 6s e^{-s} ds \right] \\ &= 2 \left[-s^3 e^{-s} - 3s^2 e^{-s} - 6s e^{-s} + \int 6e^{-s} ds \right] \\ &= 2 \left[-s^3 e^{-s} - 3s^2 e^{-s} - 6s e^{-s} - 6e^{-s} + c \right] \\ &= 2 \left[-t\sqrt{t} - 3t - 6\sqrt{t} - 6 + c \right] e^{-\sqrt{t}} \end{aligned}$$

ossia

$$\boxed{y(x) = c e^{\sqrt{x}} - x\sqrt{x} - 3x - 6\sqrt{x} - 6}$$

al variare di $c \in \mathbb{R}$
con $x \in]0, +\infty[$.

$$c) \quad y' = -\frac{2y}{x} + e^x + 1$$

Abbiamo un'eq. diff. lineare a coeff. variabili $a(x) = -\frac{2}{x}$ funz. continua su $]0, +\infty[$
 $b(x) = e^x + 1$ " " " "

$$\text{Abbiamo } A(x) = \int -\frac{2}{x} dx = -2 \log x = \log \frac{1}{x^2} \text{ e la formula risolutiva}$$

ci dà

$$y(x) = e^{\log \frac{1}{x^2}} \left(c + \int_{x_0}^x (e^t + 1) e^{\log t^2} dt \right) = \frac{1}{x^2} \left(c + \int_{x_0}^x (e^t + 1) t^2 dt \right)$$

x_0 arbitrario in $]0, +\infty[$ o in $]0, +\infty[$ $c \in \mathbb{R}$

$$\int t^2(1+e^t)dt = \int t^2 dt + \int t^2 e^t dt = \frac{t^3}{3} + \int t^2 e^t dt.$$

$$\text{Ora } \int t^2 e^t dt = t^2 e^t - \int 2t e^t dt = t^2 e^t - 2t e^t + 2e^t + c;$$

quindi

$$y(x) = \frac{1}{x^2} \left(c + \frac{x^3}{3} + x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x \right),$$

ovvia

$$y(x) = \frac{c}{x^2} + \frac{x}{3} + e^x \left(1 - \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2} \right) \quad \text{al variare di } c \in \mathbb{R},$$

(da considerare su $]-\infty, 0[$ o $]0, +\infty[$) □

$$\text{ii) } \begin{cases} y' = -\frac{2x}{1+x^2} y + \frac{1}{x(1+x^2)} \\ y(-1) = 0 \end{cases}$$

L'eq. diff. data è un'eq. diff. del primo ordine lineare con coeff. $a(x) = \frac{-2x}{1+x^2}$, $b(x) = \frac{1}{x(1+x^2)}$ funzioni continue su $]-\infty, 0[$. Poiché $A(x) = \int \frac{-2x}{1+x^2} dx = -\log(1+x^2) = \log\left(\frac{1}{1+x^2}\right)$, la formula risolutiva si scrive

$$y(x) = e^{\log \frac{1}{1+x^2}} \left(c + \int_{-1}^x \frac{1}{t(1+t^2)} e^{\log(1+t^2)} dt \right) \quad c \in \mathbb{R}$$

← scelto arbitrariamente in $]-\infty, 0[$.

$$= \frac{1}{1+x^2} \left(c + \int_{-1}^x \frac{1+t^2}{t(1+t^2)} dt \right) = \frac{1}{1+x^2} (c + \log|x|).$$

Imponendo $y(-1) = 0$, otteniamo

$$0 = \frac{1}{2} (c + \log 1) \quad \text{ovvia } c = 0.$$

In definitiva, la soluzione del problema di Cauchy è data da $y(x) = \frac{\log(-x)}{1+x^2}$ per $x \in]-\infty, 0[$; quest'ultimo è l'intervallo più grande in cui è definita la soluzione. □

$$\text{iii)} \begin{cases} y' = -xy + e^{-\frac{x^2}{2}} \sin x \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

L'eq. diff. data è un'eq. diff. del primo ordine lineare con coefficienti

$a(x) = -x$, $b(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} \sin x$ funzioni continue su tutto $\mathbb{R}$. Poiché

$A(x) = \int -x dx = -\frac{x^2}{2}$, dalla formula risolutiva si ha

$$\begin{aligned} y(x) &= e^{-\frac{x^2}{2}} \left(c + \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} \sin t e^{+\frac{t^2}{2}} dt \right) \quad c \in \mathbb{R} \\ &= e^{-\frac{x^2}{2}} \left(c + \int_0^x \sin t dt \right) = e^{-\frac{x^2}{2}} (c - \cos x), \quad c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

$\leftarrow$ scelto arbitrariamente in $\mathbb{R}$

Imponendo $y(0) = 1$ si ha

$$1 = (c - 1) \quad \text{e quindi} \quad c = 2.$$

In definitiva, la soluzione del problema di Cauchy è data da $y(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} (2 - \cos x)$ con $x \in \mathbb{R}$. □

$$\text{iv)} \begin{cases} y' = xy + e^{\frac{x^2}{2} - x} \\ y(0) = 8. \end{cases}$$

L'eq. diff. data è un'eq. diff. del primo ordine lineare con coefficienti

$a(x) = x$, $b(x) = e^{\frac{x^2}{2} - x}$ funzioni continue su tutto $\mathbb{R}$. Poiché

$A(x) = \int x dx = \frac{x^2}{2}$, usando la formula risolutiva si ha

$$\begin{aligned} y(x) &= e^{\frac{x^2}{2}} \left(c + \int_0^x e^{\frac{t^2}{2} - t} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \right) \quad c \in \mathbb{R} \\ &= e^{\frac{x^2}{2}} \left(c + \int_0^x e^{-t} dt \right) = e^{\frac{x^2}{2}} (c - e^{-x}) \end{aligned}$$

Imponendo $y(0) = 8$ si ha $8 = c - 1$, ossia $c = 9$.

In conclusione, la soluzione del probl. di Cauchy è data da

$y(x) = 9e^{\frac{x^2}{2}} - e^{\frac{x^2}{2} - x}$

■

3)i) a) $y'' - 5y' + 6y = f(x)$: $f(x) = -1$, $f(x) = e^{-x}$, $f(x) = e^{3x}$.

L'eq. caratteristica è data da $z^2 - 5z + 6 = 0$; le soluzioni sono $z_1 = 2$, $z_2 = 3$. La soluzione generale (o integrale generale) dell'eq. diff.

omogenea $y'' - 5y' + 6y = 0$ è data quindi da

$$y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x} \quad \text{al variare di } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

- Cerchiamo una soluzione particolare dell'eq. diff. completa nel caso $f(x) = -1$ del tipo $\bar{y}(x) = a$ con a da determinare.

Risulta che $\bar{y}'' - 5\bar{y}' + 6\bar{y} = -1 \Leftrightarrow 6a = -1$, ossia $y = -\frac{1}{6}$,

e che

$$y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x} - \frac{1}{6} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R} \quad \text{con } x \in \mathbb{R}$$

è l'integrale generale dell'eq. diff. $y'' - 5y' + 6y = -1$.

- Cerchiamo una soluzione particolare dell'eq. diff. completa nel caso $f(x) = e^{-x}$ del tipo $\bar{y}(x) = h e^{-x}$ con h da determinare.

Risulta che $\bar{y}'' - 5\bar{y}' + 6\bar{y} = e^{-x} \Leftrightarrow h e^{-x} + 5h e^{-x} + 6h e^{-x} = e^{-x}$

$\Leftrightarrow h = \frac{1}{12}$, e che

$$y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x} + \frac{1}{12} e^{-x} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R} \quad \text{con } x \in \mathbb{R}$$

è l'integrale generale dell'eq. diff. $y'' - 5y' + 6y = e^{-x}$.

- Cerchiamo una soluzione particolare dell'eq. diff. completa nel caso $f(x) = e^{3x}$ del tipo $\bar{y}(x) = k x e^{3x}$ con k da determinare.

Poiché $\bar{y}'(x) = k e^{3x} + 3k x e^{3x}$ e

$$\bar{y}''(x) = 6k e^{3x} + 9k x e^{3x},$$

risulta che $y'' - 5y' + 6y = e^{3x} \Leftrightarrow$

$$6k e^{3x} + 9k x e^{3x} - 5k e^{3x} - 15k x e^{3x} + 6k x e^{3x} = e^{3x} \Leftrightarrow$$

$$k e^{3x} = e^{3x} \quad \Leftrightarrow k = 1.$$

Concludiamo che l'integrale generale dell'eq. diff. completa

$$y'' - 5y' + 6y = e^{3x} \quad \text{è dato da} \quad y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x} + x e^{3x}$$

$c_1, c_2 \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}.$

□

b) $y'' - 4y = e^x$: L'eq. caratteristica si scrive $z^2 - 4 = 0$, quindi $z_{1/2} = \pm 2$; la soluzione generale (o integrale generale) dell'eq. diff. omogenea $y'' - 4y = 0$ è quindi data da

$$y(x) = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{2x} \quad \text{al variare di } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Cerchiamo una soluzione particolare dell'eq. diff. completa del tipo $\bar{y}(x) = h e^x$ con $h \in \mathbb{R}$ da determinare.

$$\text{Poniamo che } \bar{y}'' - 4\bar{y} = e^x \Leftrightarrow h e^x - 4h e^x = e^x \Leftrightarrow -3h = 1$$

$$\Leftrightarrow h = -\frac{1}{3}. \text{ Concludiamo che l'integrale generale dell'eq.}$$

diff. del secondo ordine a coeff. costanti (non omogenea) data è

$$y(x) = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{2x} - \frac{1}{3} e^x \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R} \quad \text{con } x \in \mathbb{R}.$$

$y'' - 3y' + 2y = e^x$: L'eq. caratteristica si scrive $z^2 - 3z + 2 = 0$, quindi

$z_1 = 1, z_2 = 2$ sono le soluzioni dell'eq. caratteristica. La

soluzione generale (o integrale generale) dell'eq. diff. omogenea

$y'' - 3y' + 2y = 0$ è quindi data da

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{2x} \quad \text{al variare di } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Cerchiamo una soluzione particolare dell'eq. diff. completa del tipo $\bar{y}(x) = h x e^x$ con $h \in \mathbb{R}$ da determinare.

Poiché $\bar{y}'(x) = h e^x + h x e^x$ e $\bar{y}''(x) = 2h e^x + h x e^x$ risulta

$$\text{che } \bar{y}'' - 3\bar{y}' + 2\bar{y} = e^x \Leftrightarrow 2h e^x + h x e^x - 3h e^x - 3h x e^x + 2h x e^x = e^x, \text{ ossia } -h e^x = e^x \text{ e quindi } h = -1.$$

Concludiamo che l'integrale generale dell'eq. diff. del secondo ordine a coeff. costanti (non omogenea) data è

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{2x} - x e^x \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R} \quad \text{con } x \in \mathbb{R}.$$

c) $y'' - 2y' + 2y = 4x + 3$: L'eq. caratteristica si scrive $z^2 - 2z + 2 = 0$,
quindi $z_{1/2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 8}}{2} = \frac{2 \pm 2i}{2} = 1 \pm i$; la soluzione

generale (o integrale generale) dell'eq. diff. omogenea

$$y'' - 2y' + 2y = 0 \text{ è quindi}$$

$$y(x) = c_1 e^x \sin x + c_2 e^x \cos x \text{ al variare di } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Cerchiamo una soluzione particolare dell'eq. diff. completa del tipo $\bar{y}(x) = ax + b$ con $a, b \in \mathbb{R}$ da determinare.

$$\text{Risulta che } \bar{y}'' - 2\bar{y}' + 2\bar{y} = 4x + 3 \Leftrightarrow -2a + 2ax + 2b = 4x + 3$$

$$\Leftrightarrow 2a = 4 \text{ e } -2a + 2b = 3 \text{ da cui } a = 2, b = \frac{7}{2}.$$

Concludiamo che l'integrale generale dell'eq. diff. del secondo ordine a coeff. costanti (non omogenea) data è

$$y(x) = c_1 e^x \sin x + c_2 e^x \cos x + 2x + \frac{7}{2} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R} \quad \text{con } x \in \mathbb{R}.$$

$$y'' + 9y = x \cos x : \text{L'eq. caratteristica si scrive } z^2 + 9 = 0, \text{ quindi}$$

$$z_{1/2} = \pm 3i \text{ sono le due radici. La soluzione generale}$$

$$(o integrale generale) dell'eq. diff. omogenea } y'' + 9y = 0 \text{ è}$$

quindi

$$y(x) = c_1 \sin 3x + c_2 \cos 3x \text{ al variare di } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

[solo brevemente
accennato a
lezione]

Cerchiamo una soluzione particolare dell'eq. diff. completa

$$\text{del tipo } \bar{y}(x) = (ax+b) \sin x + (cx+d) \cos x \text{ con } a, b, c, d \in \mathbb{R}$$

da determinare. Poiché

$$\bar{y}'(x) = a \sin x + (ax+b) \cos x + c \cos x - (cx+d) \sin x$$

$$\bar{y}''(x) = 2a \cos x - (ax+b) \sin x - 2c \sin x - (cx+d) \cos x,$$

$$\text{mi ha } \bar{y}'' + 9\bar{y} = x \cos x \Leftrightarrow$$

$$2a \cos x - (ax+b) \sin x - 2c \sin x - (cx+d) \cos x + 9(ax+b) \sin x + 9(cx+d) \cos x = x \cos x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a - d + 9d = 0 \\ -c + 9c = 1 \\ -a + 9a = 0 \\ -b - 2c + 9b = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} a=0, & c = \frac{1}{8}, & d=0 \\ b = \frac{1}{32} \end{matrix}$$

Concludiamo che l'integrale generale dell'eq. diff. del secondo ordine a coeff. costanti (non omogenea) data è

$$y(x) = c_1 \sin 3x + c_2 \cos 3x + \frac{1}{32} \sin x + \frac{1}{8} x \cos x \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R} \quad x \in \mathbb{R}$$

d) $y'' + 2y' = e^{-2x} + 3x + 1$ □

L'eq. caratteristica è data da $z^2 + 2z = 0$; le soluzioni sono $z_1 = 0, z_2 = -2$.

La soluzione generale dell'eq. diff. omogenea $y'' + 2y' = 0$ è data quindi da $y(x) = c_1 + c_2 e^{-2x}$, al variare di $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Cerchiamo una soluzione particolare dell'eq. diff. $y'' + 2y' = e^{-2x}$ del tipo $\bar{y}(x) = a x e^{-2x}$ con a da determinare. Rimetta che $\bar{y}'' + 2\bar{y}' = e^{-2x} \Leftrightarrow -2a e^{-2x} = e^{-2x} \Leftrightarrow a = -\frac{1}{2}$.

Cerchiamo una soluzione particolare dell'eq. diff. $y'' + 2y' = 3x + 1$ del tipo $\bar{\bar{y}}(x) = x(ax + b)$ (nota: nell'eq. diff. manca il termine in y e quindi si deve cercare come soluzione particolare con dato un polinomio di grado 1, un polinomio di tipo $x(ax + b)$).

Si ha $\bar{\bar{y}}'(x) = 2ax + b$, $\bar{\bar{y}}''(x) = 2a$ e quindi $\bar{\bar{y}}'' + 2\bar{\bar{y}}' = 3x + 1$
 $\Leftrightarrow 2a + 4ax + 2b = 3x + 1 \Leftrightarrow 4a = 3, 2a + 2b = 1$.

La soluzione particolare $\bar{\bar{y}}$ è data quindi da $\bar{\bar{y}}(x) = \frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{4}x$.

Infine, la soluzione generale di $y'' + 2y' = e^{-2x} + 3x + 1$ è

$$y(x) = c_1 + c_2 e^{-2x} - \frac{1}{2} x e^{-2x} + \frac{3}{4} x^2 - \frac{1}{4} x \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R} \quad \text{con } x \in \mathbb{R}.$$

$y'' - 2y' + y = e^x \sin x$:

L'eq. caratteristica risolve $z^2 - 2z + 1 = 0$, ossia $(z-1)^2 = 0$.

La soluzione generale (o integrale generale) dell'eq. diff. omogenea

$y'' - 2y' + y = 0$ è quindi $y(x) = c_1 e^x + c_2 x e^x$, al variare di $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

[solo brevemente
accennato a
lezioni]

Cerchiamo una soluzione particolare dell'eq. diff. completa
del tipo $\bar{y}(x) = ae^x \cos x + be^x \sin x$ con $a, b \in \mathbb{R}$ da determinare.

Ora

$$\bar{y}'(x) = ae^x \cos x - ae^x \sin x + be^x \sin x + be^x \cos x$$

$$\bar{y}''(x) = \cancel{ae^x \cos x} - 2ae^x \sin x - \cancel{ae^x \cos x} + be^x \sin x + \cancel{be^x \cos x} - be^x \sin x$$

Dunque

$$\begin{aligned} & -2ae^x \sin x + 2be^x \cos x - 2ae^x \cos x + 2ae^x \sin x - 2be^x \sin x - 2be^x \cos x \\ & + ae^x \cos x + be^x \sin x = e^x \sin x \quad \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$-ae^x \cos x - be^x \sin x = e^x \sin x \quad \Leftrightarrow \quad -b = 1, \quad a = 0.$$

La soluzione particolare $\bar{y}$ è data quindi da $\bar{y}(x) = -e^x \sin x$

Infine, la soluzione generale di $y'' - 2y' + y = e^x \sin x$ è

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 x e^x - e^x \sin x \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

con $x \in \mathbb{R}$.

$$\text{ii) } \begin{cases} y'' - 3y = 2e^{3x} \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

L'eq. caratteristica è data da $z^2 - 3 = 0$,

quindi $z_{1/2} = \pm\sqrt{3}$ sono le soluzioni.

La soluzione generale dell'eq. diff. omogenea

è data da $y(x) = c_1 e^{-\sqrt{3}x} + c_2 e^{\sqrt{3}x}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Cerchiamo una soluzione particolare dell'eq. diff. completa del tipo

$\bar{y}(x) = ae^{3x}$ con $a \in \mathbb{R}$ da determinare. Poiché $\bar{y}'(x) = 3ae^{3x}$ e

$\bar{y}''(x) = 9ae^{3x}$ si ha che $\bar{y}'' - 3\bar{y} = 2e^{3x} \Leftrightarrow 9ae^{3x} - 3ae^{3x} = 2e^{3x}$

$\Leftrightarrow 6ae^{3x} = 2e^{3x} \Leftrightarrow a = \frac{1}{3}$. La soluzione generale dell'eq.

diff. data è quindi

$$y(x) = c_1 e^{-\sqrt{3}x} + c_2 e^{\sqrt{3}x} + \frac{1}{3} e^{3x} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Imponendo $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$ si ha

$$0 = c_1 + c_2 + \frac{1}{3}$$

$$2c_1 = -\frac{1}{3} \quad c_1 = -\frac{1}{6}$$

$$1 = -\sqrt{3}c_1 + \sqrt{3}c_2 + \frac{1}{3} \quad \Leftrightarrow \quad c_1 = c_2$$

$$c_2 = -\frac{1}{6}$$

è l'unica soluzione del probl. di Cauchy dato è

$$y(x) = -\frac{1}{6}e^{-\sqrt{3}x} - \frac{1}{6}e^{\sqrt{3}x} + \frac{1}{3}e^{3x} \quad x \in \mathbb{R}$$

□

$$\text{iii) } \begin{cases} y'' - 2y' + y = x^2 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

L'eq. caratteristica è data da $z^2 - 2z + 1 = 0$,

quindi $z_1 = 1$.

La soluzione generale dell'eq. diff. omogenea è data da $y(x) = c_1 e^x + c_2 x e^x$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Cerchiamo una soluzione particolare dell'eq. diff. completa del tipo $\bar{y}(x) = ax^2 + bx + c$ con $a, b, c \in \mathbb{R}$ da determinare. Poiché

$$\bar{y}'(x) = 2ax + b, \quad \bar{y}''(x) = 2a \text{ si ha che } \bar{y}'' - 2\bar{y}' + \bar{y} = x^2 \Leftrightarrow$$

$$2a - 4ax - 2b + ax^2 + bx + c = x^2. \text{ si ha } a = 1$$

$$-4a + b = 0, \quad 2a - 2b + c = 0. \text{ Quindi } a = 1, b = 4, c = 6.$$

La soluzione generale dell'eq. diff. completa è quindi

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 x e^x + x^2 + 4x + 6.$$

Imponendo $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$ si ha che l'unica soluzione del probl. di Cauchy dato è

$$y(x) = -6e^x + 3xe^x + x^2 + 4x + 6 \quad x \in \mathbb{R}.$$

□

$$\text{iv) } \begin{cases} y'' + y = \cos x \\ y(0) = 5 \\ y'(0) = 7 \end{cases}$$

L'eq. caratteristica è data da $z^2 + 1 = 0$,

quindi $z_{1/2} = \pm i$.

La soluzione generale dell'eq. diff. omogenea

è data da $y(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Cerchiamo una soluzione particolare dell'eq. diff. completa del

tipo $\bar{y}(x) = ax \cos x + bx \sin x$ con $a, b \in \mathbb{R}$ da determinare.

Poiché $\bar{y}'(x) = a \cos x - ax \sin x + b \sin x + bx \cos x$ e

$$\bar{y}''(x) = -2a \sin x - ax \cos x + 2b \cos x - bx \sin x$$

si ha che $\bar{y}''(x) + \bar{y} = \cos x \Leftrightarrow$

$$-2a \sin x - a \cancel{\cos x} + 2b \cos x - b \cancel{\sin x} + a \cancel{\cos x} + b \cancel{\sin x} = \cos x$$

$$\Leftrightarrow 2b = 1, a = 0.$$

La soluzione generale dell'eq. diff. completa è quindi:

$$y(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x + \frac{1}{2} x \sin x \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R},$$

Imponendo $y(0) = 5$ e $y'(0) = 7$ si ottiene l'unica soluzione del probl. di Cauchy

$$y(x) = 5 \cos x + 7 \sin x + \frac{x \sin x}{2}$$

$x \in \mathbb{R}.$

□

$$v) \begin{cases} y'' - 4y = x^2 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

La soluzione generale dell'eq. diff. omogenea è

$$y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{2x} \quad \text{al variare di } c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

(vedi Es. 3 i) b)). Cerchiamo una soluzione particolare

dell'eq. diff. completa del tipo $\bar{y}(x) = ax^2 + bx + c$,

con $a, b, c \in \mathbb{R}$ da determinare. Poiché $\bar{y}'(x) = 2ax + b$ e $\bar{y}''(x) = 2a$,

$$\text{si ha } \bar{y}'' - 4\bar{y} = x^2 \Leftrightarrow 2a - 4ax^2 - 4bx - 4c = x^2 \Leftrightarrow$$

$$-4a = 1, -4b = 0, 2a - 4c = 0 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{4}, c = -\frac{1}{8}.$$

La soluzione generale dell'eq. diff. completa è quindi:

$$y(x) = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{2x} - \frac{1}{4} x^2 - \frac{1}{8}.$$

Imponendo $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$ si ottiene l'unica soluzione del probl. di Cauchy dato:

$$y(x) = -\frac{3}{16} e^{-2x} + \frac{5}{16} e^{2x} - \frac{x^2}{4} - \frac{1}{8}$$

$x \in \mathbb{R}$

□

$$vi) \begin{cases} y'' + 2y' = e^{-2x} + 3x + 1 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

Abbiamo già trovato la soluzione generale dell'eq. diff. data (vedi Es. 3) i) d))

$$y(x) = c_1 + c_2 e^{-2x} - \frac{1}{2} x e^{-2x} + \frac{3}{4} x^2 - \frac{1}{4} x \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Imponendo $y(0)=0$, $y'(0)=1$ si ottiene l'unica soluzione del probl. di Cauchy

ovvia $y(x) = \frac{7}{8} - \frac{7}{8}e^{-2x} - \frac{1}{2}xe^{-2x} + \frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{4}x$

$$y(x) = -\frac{7}{8}e^{-2x} - \frac{1}{2}xe^{-2x} + \frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{4}x + \frac{7}{8} \quad x \in \mathbb{R} \quad \square$$

vii)
$$\begin{cases} y'' - 2y' + y = e^x + 3\sin x \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

Abbiamo già trovata la soluzione generale dell'eq. diff. omogenea data (vedi, per esempio, Es. 3)iii); essa è

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 x e^x, \text{ al variare di } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Cerchiamo una soluzione particolare dell'eq. diff. $y'' - 2y' + y = e^x$ del tipo $\bar{y}(x) = ax^2 e^x$. Si ha $\bar{y}'(x) = 2axe^x + ax^2 e^x$, e $\bar{y}''(x) = 2ae^x + 4axe^x + ax^2 e^x$. Ora $\bar{y}'' - 2\bar{y}' + \bar{y} = e^x \Leftrightarrow 2ae^x + 4axe^x + ax^2 e^x - 4axe^x - 2axe^x + ax^2 e^x = e^x$
 $\Leftrightarrow 2a = 1$, ovvia $a = \frac{1}{2}$.

Cerchiamo una soluzione particolare dell'eq. diff. $y'' - 2y' + y = 3\sin x$ del tipo $\bar{y}(x) = a\sin x + b\cos x$ con $a, b \in \mathbb{R}$ da determinare.

Si ha $\bar{y}'(x) = a\cos x - b\sin x$, $\bar{y}''(x) = -a\sin x - b\cos x$.

Ora $\bar{y}'' - 2\bar{y}' + \bar{y} = 3\sin x \Leftrightarrow -a\sin x - b\cos x - 2a\cos x + 2b\sin x + a\sin x + b\cos x = 3\sin x \Leftrightarrow 2b = 3$, $a = 0$, ovvia $a = 0$, $b = \frac{3}{2}$.

In conclusione, la soluzione generale dell'eq. diff. completa data è

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 x e^x + \frac{1}{2} x^2 e^x + \frac{3}{2} \cos x,$$

al variare di $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Imponendo $y(0)=0$, $y'(0)=1$ si ottiene

$$c_1 = -\frac{3}{2} \text{ e } c_1 + c_2 = 1, \text{ da cui } c_1 = -\frac{3}{2} \text{ e } c_2 = \frac{5}{2}.$$

L'unica soluzione del problema di Cauchy dato è quindi

$$y(x) = -\frac{3}{2} e^x + \frac{5}{2} x e^x + \frac{1}{2} x^2 e^x + \frac{3}{2} \cos x \quad x \in \mathbb{R}.$$