

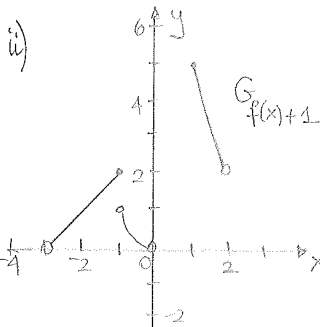
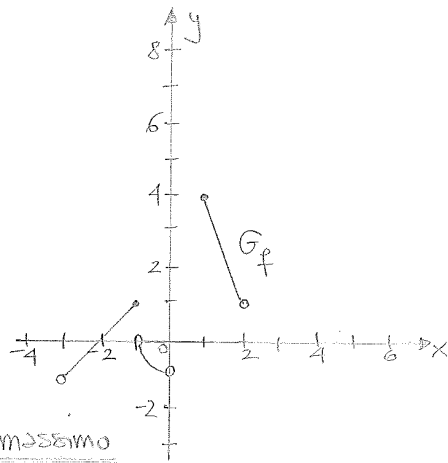
1) $f:]-3, 0[\cup]1, 2[\rightarrow \mathbb{R}$

i)
$$f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{se } -3 < x \leq -1 \\ x^2-1 & \text{se } -1 < x < 0 \\ -3x+7 & \text{se } 1 \leq x < 2 \end{cases}$$

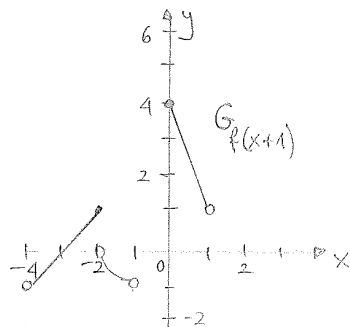
Nota: $\inf f =]-1, 4]$

$\inf f = -1$

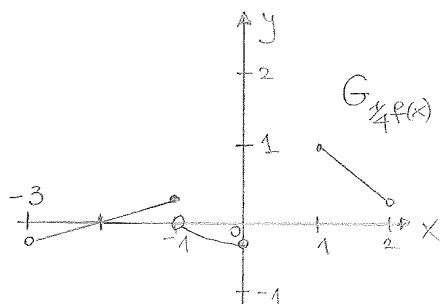
$\sup f = \max f = 4 \quad x=1 \text{ pt. di massimo}$



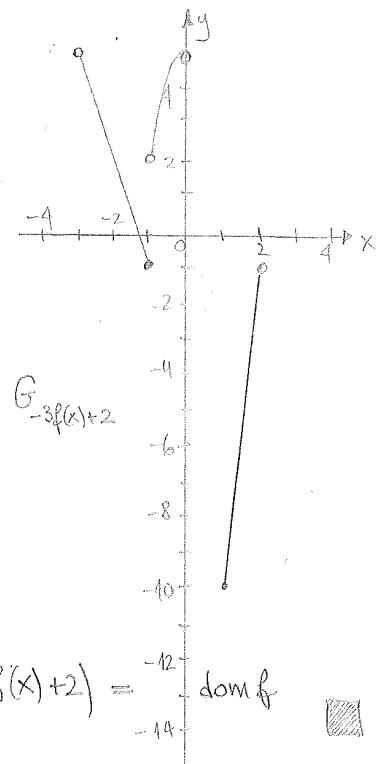
$\text{dom}(f(x)+1) =]-3, 0[\cup]1, 2[$



$\text{dom}(f(x+1)) =]-4, -1[\cup]0, 1[$

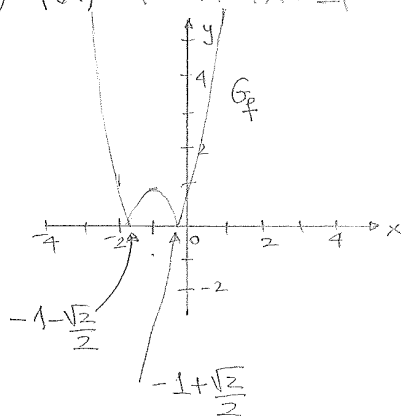


$\text{dom}\left(\frac{1}{4}f(x)\right) =]-3, 0[\cup]1, 2[$



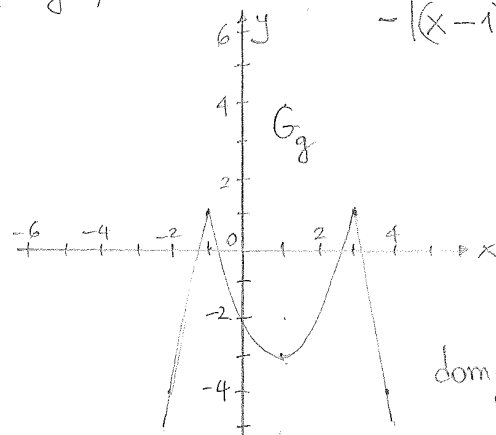
$\text{dom}(-3f(x)+2) = \text{dom } f$

2) i) $f(x) = |2x^2 + 4x + 1| = |2(x^2 + 2x) + 1| = |2(x+1)^2 - 1|$



$\text{dom } f = \mathbb{R}$

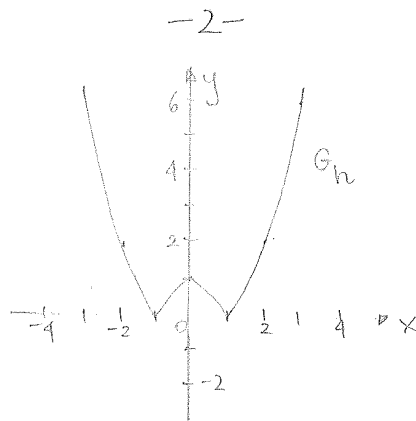
$g(x) = -|x^2 - 2x - 3| + 4 = -|(x-1)^2 - 4| + 4$



$\text{dom } g = \mathbb{R}$

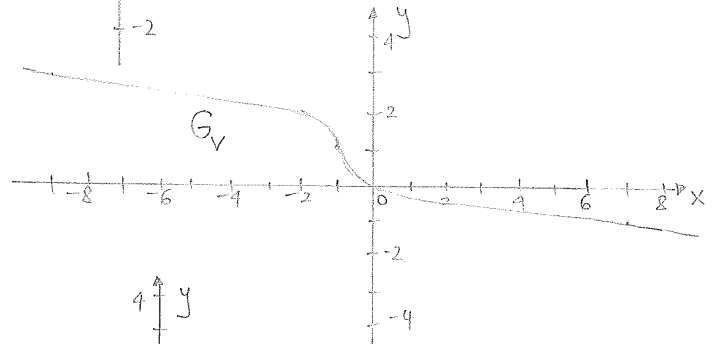
$$h(x) = |2^{|x|} - 2|$$

$$\text{dom } h = \mathbb{R}$$



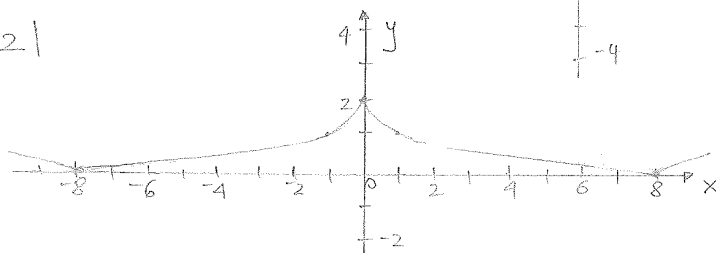
$$v(x) = 1 - \sqrt[3]{x+1}$$

$$\text{dom } v = \mathbb{R}$$



$$u(x) = ||\sqrt[3]{x}| - 2|$$

$$\text{dom } u = \mathbb{R}$$



f : $x = -1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$, $x = -1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$ sono pt. di minimo locale (forte).
 $x = -1$ è pt. di massimo locale (forte).

g : $x = 1$ pt. di minimo locale (forte).
 $x = -1$, $x = 3$ sono pt. di massimo locale (forte).

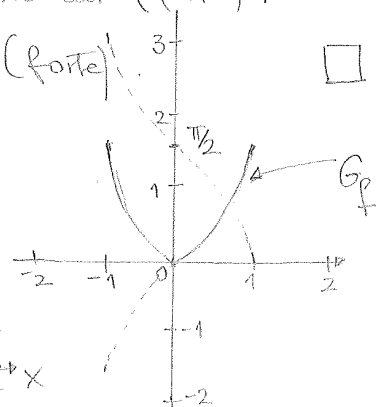
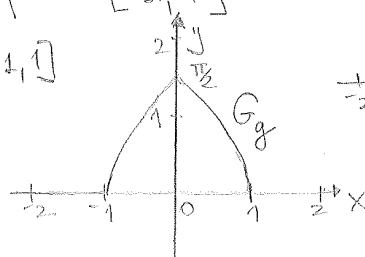
h : $x = -1$, $x = 1$ pt. di minimo locale (forte).
 $x = 0$ pt. di massimo locale (forte).

v : ~~Non~~ pt. di massimo/minimo locale.

u : $x = -8$, $x = 8$ pt. di minimo locale (forte).
 $x = 0$ pt. di massimo locale (forte).

ii) $f(x) = \left| \frac{\pi}{2} - \arccos x \right|$ in $[-1, 1]$

$$g(x) = \arccos|x|$$
 in $[-1, 1]$



$$f : \min_{[-1,1]} f = 0 \quad \max_{[-1,1]} f = \frac{\pi}{2}$$

$x=0$ pt. di minimo,
 $x=-1, 1$ pt. di massimo.

$$g : \min_{[-1,1]} g = 0 \quad \max_{[-1,1]} g = \frac{\pi}{2}$$

$x=-1, 1$ pt. di minimo
 $x=0$ pt. di massimo



3) i) $f(x) = |\log|x|| \quad \text{dom } f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$g(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x < 0 \\ 1 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

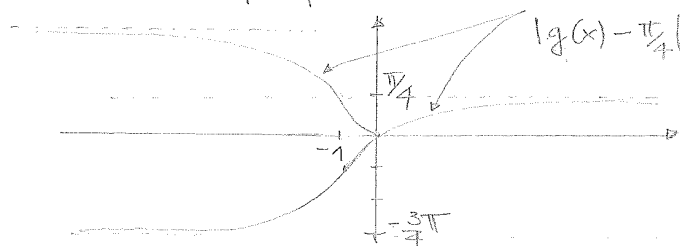
$$(g \circ f)(x) \underset{x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}}{=} 1 \quad \text{poiché } |\log|x|| \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$\text{dom}(g \circ f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$; $\text{im}(g \circ f) = \{1\}$; non è iniettiva (banale!)
 è pari: infatti $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ è simmetrico e $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(-x) \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.



ii) $f(x) = e^{|x - \pi/4|} \quad g(x) = \arctan(x+1)$

Ricordiamo che $-\frac{\pi}{2} < \arctan(x+1) < \frac{\pi}{2}$ e $-\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} < \arctan(x+1) - \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}$
 e quindi $-\frac{3\pi}{4} < \arctan(x+1) - \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{4} \quad \forall x \in \mathbb{R}$.



$$\text{im}(f \circ g) = \text{im } e^{|g(x) - \pi/4|} = [e^0, e^{3\pi/4}] = \underline{\underline{[1, e^{3\pi/4}]}}$$

$f \circ g$ non è iniettiva; basta osservare che $\exists$ no x_1, x_2 con $x_1 \neq x_2$ e $|g(x_1) - \pi/4| = |g(x_2) - \pi/4|$ e quindi $(f \circ g)(x_1) = (f \circ g)(x_2)$



4) $B = \{x \in \mathbb{R} : -1 \leq 2 + 4x \leq 1\} = \{x \in \mathbb{R} : -3 \leq 4x \leq -1\}$
 $= \underline{\underline{[-\frac{3}{4}, -\frac{1}{4}]}}$

Nota che $g(x) = 2 + 4x$ è crescente su $[-\frac{3}{4}, -\frac{1}{4}]$; inoltre (strettamente)

$\arccos x$ è strettamente decrescente; risulta che $f(x)$ è
 iniettiva. Inoltre risulta suriettiva; quindi f è biiettiva
 e quindi invertibile. Si ha $\arccos(2+4x) = y \in [0, \pi]$
 $\Leftrightarrow 2+4x = \cos y \Leftrightarrow 4x = \cos y - 2 \Leftrightarrow x = \frac{\cos y}{4} - \frac{1}{2}$.
 La funzione inversa è quindi $f^{-1}(x): [0, \pi] \rightarrow [-\frac{3}{4}, -\frac{1}{4}]$
 $f^{-1}(x) = \frac{\cos x}{4} - \frac{1}{2}$. □

$$5) i) \sin(\arcsin(2x+1)) = x-3 \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq 2x+1 \leq 1 \\ 2x+1 = x-3 \end{cases}$$

Poiché $-1 \leq x \leq 0$ e $x = -4$ sono incompatibili, si ha:
 che l'unione soluzione $S = \emptyset$. □

$$ii) \arcsin(\sin x) = 2x-1 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1 \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \\ x = 2x-1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{\pi}{2}+1 \leq 2x \leq 1+\frac{\pi}{2} \\ x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\pi}{4}+\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}+\frac{\pi}{4} \\ x = 1 \end{cases}$$

$$S = \{1\}.$$

$$iii) \sin(\arcsin(\frac{x^2}{2})) = x + \frac{3}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq \frac{x^2}{2} \leq 1 \\ \frac{x^2}{2} = x + \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2} \\ x^2 - 2x - 3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2} \\ x = -1, x = 3 \end{cases}$$

$$S = \{-1\}.$$

$$iv) \arcsin(\cos(x^2-x)) = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \cos(x^2-x) = 1$$

$$\Leftrightarrow x^2-x = 2k\pi \Leftrightarrow x^2-x-2k\pi = 0$$

$$S = \left\{ \frac{1 \pm \sqrt{1+8k\pi}}{2}, k \in \mathbb{N} \right\} \quad x_{1/2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8k\pi}}{2} \quad k \geq 0$$

$$6) i) f(x) = \frac{x^3}{x^2-1} \quad \text{dom } f = \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}; \text{ insieme simmetrico rispetto all'origine}$$

f è dispari!
 Inoltre $f(-x) = \frac{(-x)^3}{(-x)^2-1} = \frac{-x^3}{x^2-1} = -\left(\frac{x^3}{x^2-1}\right) = -f(x)$
 $\forall x \in \text{dom } f$

$$g(x) = x^2 \arctan(3x) \quad \text{dom } g = \mathbb{R}; \text{ insieme simmetrico rispetto all'origine}$$

$$g(-x) = (-x)^2 \arctan(-3x) = -x^2 \arctan(3x) = -f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

g è dispari!

$$h(x) = x \operatorname{arcsin}(4x) \quad \operatorname{dom} h = \left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right] : \text{intervallo simmetrico rispetto all'origine}$$

$$h(-x) = -x \operatorname{arcsin}(-4x) = +x \operatorname{arcsin}(4x) = h(x) \quad \forall x \in \left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right].$$

h è pari!

$$u(x) = \log(1+|x|) \quad \operatorname{dom} u = \mathbb{R}$$

$$u(-x) = \log(1+|-x|) = \log(1+|x|) = u(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

u è pari! □

$$\text{ii)} \bullet f(x) = \log(1+e^x) \quad \operatorname{dom} f = \mathbb{R}$$

$1+e^x$ è strettamente crescente e $\log x$ è strettamente crescente;

$$\text{otteniamo } f([0,1]) = [\log(1+e^0); \log(1+e^1)] =$$

$$= [\log 2; \log(1+e)] ;$$

$$\bullet g(x) = \sqrt[3]{-\arctan x + 1}$$

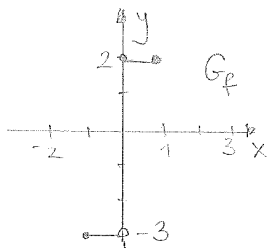
$-\arctan x + 1$ è strettamente decrescente, $\sqrt[3]{x}$ è strettamente

$$\text{crescente; otteniamo } g([0,1]) = [g(1), g(0)] = \left[\sqrt[3]{-\frac{\pi}{4}+1}, \sqrt[3]{1}\right] =$$

$$= \left[\sqrt[3]{-\frac{\pi}{4}+1}, 1\right].$$

• si sfrutta qui la conoscenza "empirica" delle immagini delle funzioni elementari. ▣

$$7) f: [-1,1] \rightarrow \mathbb{R}$$



$$g:]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R} \quad g(x) = \log_2 x$$

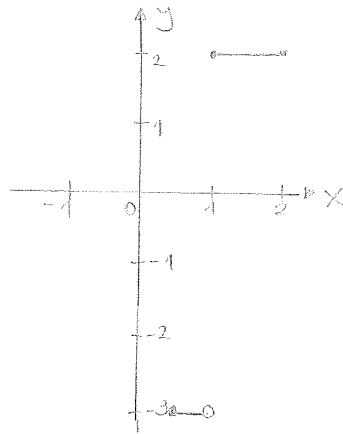
Indaghiamo dominio di $f \circ g$:

$$[-1 \leq \log_2 x \leq 1, \text{ per } x > 0]$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \frac{1}{2} \leq x \leq 2 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{2} \leq x \leq 2$$

$$\text{Quindi } f \circ g: A = \left[\frac{1}{2}, 2\right] \rightarrow \mathbb{R} \text{ e mi ha}$$

$$(f \circ g)(x) = \begin{cases} -3 & \frac{1}{2} \leq x < 1 \\ 2 & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

$G_{f \circ g}$ 

$f \circ g$ non è una funzione costante su A ;
 è una funzione costante a tratti.

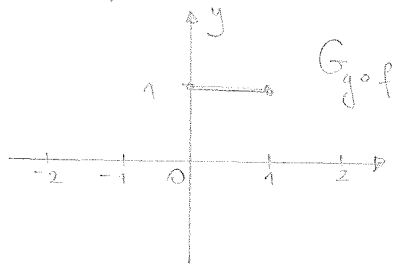
Infine, indaghiamo il dominio di $g \circ f$: dobbiamo avere

$$\tilde{A} = \{x \in [-1, 1] : f(x) > 0\} = [0, 1]$$

Quindi

$$g \circ f : \tilde{A} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(g \circ f)(x) = g(z) = \log_2 2 = 1 \quad \forall x \in \tilde{A}$$

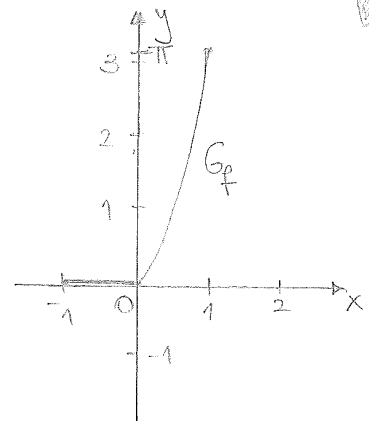


$g \circ f$ è una funzione costante su $\tilde{A}$.

$$\max_A (f \circ g) = 2 \quad \min_A (f \circ g) = -3 ;$$

$$\max_{\tilde{A}} (g \circ f) = \min_{\tilde{A}} (g \circ f) = 1 .$$

$$\begin{aligned} 8) f(x) &= \arcsin x + |\arcsin x| \quad x \in [-1, 1] \\ &= \begin{cases} 0 & \text{se } x \in [-1, 0] \\ 2 \arcsin x & \text{se } x \in [0, 1] \end{cases} \end{aligned}$$



i) se $k < 0$ ~~Non~~ sono soluz. dell'eq. $f(x) = k$
 se $k = 0$ Sono infinite "

se $0 < k \leq \pi$ $\exists$ una soluzione dell'eq. $f(x) = k$.

se $k > \pi$ ~~Non~~ sono soluzioni dell'eq. $f(x) = k$.

ii) No! È costante ristretta all'intervallo $[-1, 0]$.

$$9) i) a) \sqrt{\log_{\frac{1}{2}} |x| - 1} \quad \begin{cases} x \neq 0 & \text{altrimenti non è def. } \log_{\frac{1}{2}} |x| \\ \log_{\frac{1}{2}} |x| - 1 \geq 0 & \text{altrimenti non è def. } \sqrt{} \end{cases}$$

$$\text{ora } \log_{\frac{1}{2}} |x| \geq 1 \Leftrightarrow \log_{\frac{1}{2}} |x| \geq \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow |x| \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$$

$$\text{dominio di } \sqrt{\log_{\frac{1}{2}} |x| - 1} : \underline{\underline{\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \setminus \{0\}}}. \quad \square$$

$$\arccos(x^2 - 2) : -1 \leq x^2 - 2 \leq 1 \Leftrightarrow 1 \leq x^2 \leq 3$$

$$\text{dominio di } \arccos(x^2 - 2) : \underline{\underline{[-\sqrt{3}, -1] \cup [1, \sqrt{3}]}}. \quad \square$$

$$b) \sqrt[3]{\arcsin x} - 1 : \underline{\underline{x \in [-1, 1]}} \quad \square$$

$$\arcsin(\sqrt[3]{x} - 1) : \sqrt[3]{x} - 1 \in [-1, 1] \Leftrightarrow$$

$$0 \leq \sqrt[3]{x} \leq 2 \Leftrightarrow x \in \underline{\underline{[0, 8]}} \quad \square$$

ii) $\sqrt[3]{\arcsin x} - 1$ è strettamente crescente essendo $\arcsin x$ strett. crescente in $[-1, 1]$ e $\sqrt[3]{x}$ è strett. crescente in $\mathbb{R}$. La traslazione di $\sqrt[3]{\arcsin x}$ di -1 lungo l'asse y non influenza la monotonia. $\arcsin(\sqrt[3]{x} - 1)$ è strett. crescente essendo nuovamente la composizione di funzioni strett. crescenti. $\blacksquare$

$$10) i) a_n < a_{n+1} \Leftrightarrow \frac{n^2 - 1}{2n} < \frac{(n+1)^2 - 1}{2(n+1)} \Leftrightarrow$$

$$(n^2 - 1)(n+1) < [(n+1)^2 - 1]n \Leftrightarrow$$

$$n^3 + n^2 - n - 1 < n^3 + 2n^2 \Leftrightarrow$$

$$n^2 + n + 1 > 0 \quad \forall n > 1. \quad \square$$

ii) $b_n = \arctan a_n$ è composizione di due funzioni strett. crescenti e quindi è strett. crescente. $\blacksquare$