

1) i) $f(x) = \sqrt{1+\sin x}$

Ricordo che $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$ per $x \rightarrow 0$, mentre

$$\begin{aligned}\sqrt{1+t} &= (1+t)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}\left(\frac{-1}{2}\right)\frac{t^2}{2!} + \frac{1}{2}\left(\frac{-1}{2}\right)\left(\frac{-3}{2}\right)\frac{t^3}{3!} + o(t^3) \text{ per } t \rightarrow 0 \\ &= 1 + \frac{1}{2}t - \frac{1}{8}t^2 + \frac{1}{16}t^3 + o(t^3) \text{ per } t \rightarrow 0.\end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{aligned}f(x) &= \sqrt{1+\sin x} = 1 + \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) - \frac{1}{8}\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^2 + \frac{1}{16}\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^3 + o(x^3) \\ &= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{12}x^3 + o(x^3) - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2) + \frac{1}{16}x^3 + o(x^3) \\ &= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{48}x^3 + o(x^3).\end{aligned}$$

Dunque il polinomio cercato è $P_3(x) = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{48}x^3$. □

ii) $f(x) = x^2 \log(1+\sin x)$

Ricordo che $\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$ per $x \rightarrow 0$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \text{ per } x \rightarrow 0$$

Quindi

$$\begin{aligned}f(x) &= x^2 \log(1+\sin x) = x^2 \left[x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) - \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^2 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{3}\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^3 + o(x^3) \right] \\ &= x^3 - \frac{x^5}{6} - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3}x^5 + o(x^6) \\ &= x^3 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{6}x^5 + o(x^6).\end{aligned}$$

Dunque il polinomio cercato è $P_5(x) = x^3 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{6}x^5$. ■

2) Studiamo brevemente la funzione $f(x) = x \log^2 x$. Abbiamo

• $\text{dom } f =]0, +\infty[$;

f continua su $]0, +\infty[$

• $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$ [basta applicare il Teor. di de L'Hôpital a $\frac{\log^2 x}{\frac{1}{x}}$. Si ha da valutare $\frac{2(\log x) \frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}$; siccome è ancora in forma indet. $\frac{\infty}{\infty}$,

riappliciamo de L'Hôpital: $\frac{2 \frac{1}{x}}{+\frac{1}{x^2}} = 2x \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$, e quindi $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \log^2 x = 0$.]

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \log^2 x = +\infty.$$

• $\text{dom } f' =]0, +\infty[$ e $f'(x) = \log^2 x + 2(\log x) \frac{1}{x} = (\log x)(\log x + 2)$

Si ha $x=1$, $x=\frac{1}{e^2}$ sono pt. critici

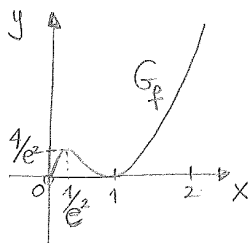
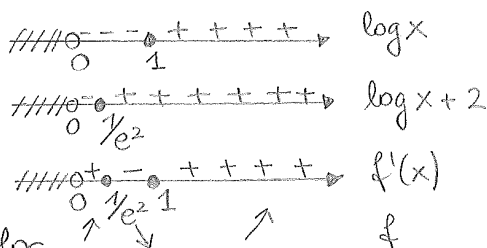


grafico qualitativo
di f

$\Rightarrow x = \frac{1}{e^2}$ pt. di max. loc.
(shello) per f

$x = 1$ pt. di min. loc.
(shello) per f



$$f\left(\frac{1}{e^2}\right) = \frac{1}{e^2} \left(\log \frac{1}{e^2}\right)^2 = \frac{1}{e^2} \cdot 4 = \frac{4}{e^2}$$

$$f(1) = 0.$$

Possiamo allora asserire che

$\nexists$ soluz. di $x \log^2 x = k$ se $k < 0$;

$\exists$ una soluz. " se $k = 0$;

Sono tre soluz. " se $0 < k < \frac{4}{e^2}$;

Sono due soluz. " se $k = \frac{4}{e^2}$;

$\exists$ una soluzione " se $k > \frac{4}{e^2}$. ■

3)i) $f(x) = (x-1)(x^2+2x-3)$ • $\text{dom } f = \mathbb{R}$

• f continua su $\mathbb{R}$

• $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

• $\text{dom } f' = \mathbb{R}$

$$f'(x) = (x^3 + x^2 - 5x + 3)' = 3x^2 + 2x - 5$$

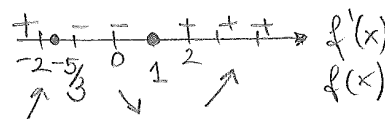
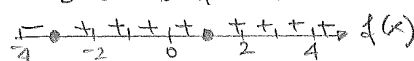
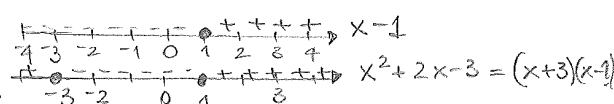
$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 + 2x - 5 = 0 \Leftrightarrow x_{1/2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4+60}}{6} = \frac{-2 \pm 8}{6}$$

pt. critici sono $x_1 = -\frac{5}{3}$; $x_2 = 1$

• Dalla monotonia di f segue che

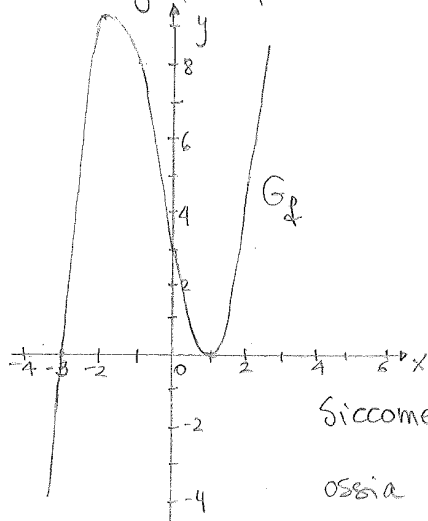
$x = -\frac{5}{3}$ è pt. di max. loc. (shello) per f ; $f\left(-\frac{5}{3}\right) = -\frac{125}{27} + \frac{25}{9} + \frac{25}{3} + 3 = \frac{25}{27}$

$x = 1$ è pt. di min. loc. (shello) per f ; $f(1) = 0 \sim 9.5$



• $\text{dom } f'' = \mathbb{R}$ $f''(x) = 6x + 2$

Un grafico qualitativo di f è



$f''(x)$ $f(x)$

Diagram showing the sign of $f''(x)$ and $f(x)$ on a number line. $f''(x)$ is negative for $x < -1/3$ and positive for $x > -1/3$. $f(x)$ has a local minimum at $x = -1/3$.

ii) Oss. che X è soluzione dell'eq. $e^{3X} + 2e^{2X} - 5e^X + 3 = 0$
 Se e solo se $t = e^X$ è soluzione dell'eq.

$t^3 + t^2 - 5t + 3 = 0$. Ora le uniche soluzioni di quest'ultima eq. sono $t = -3$ o $t = 1$.

Siccome $-3 = e^X$ non è accettabile, rimane solo $1 = e^X$
 ossia $X = 0$. ■

4) $f(x) = \log(x + \sqrt{x^2 + 1})$: osserviamo che deve essere $x + \sqrt{x^2 + 1} > 0$;
 notiamo che $x + \sqrt{x^2 + 1} > x + |x| = \begin{cases} 2x & \text{se } x \geq 0 \\ 0 & \text{se } x < 0 \end{cases}$

• quindi $\text{dom } f = \mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$

• Notiamo che f è continua su $\mathbb{R}$ (somma e composizione di funz. continue)

• $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \log \left(x + \sqrt{x^2 + 1} \cdot \frac{x - \sqrt{x^2 + 1}}{x - \sqrt{x^2 + 1}} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \log \left(\frac{-1}{x - \sqrt{x^2 + 1}} \right) =$
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ $= \lim_{x \rightarrow -\infty} \log \left(\frac{-1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \right) = -\infty$

• $\text{dom } f' = \mathbb{R}$ (composizione di funzioni derivabili)

$$f'(x) = \frac{1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{x + \sqrt{x^2+1}} = \frac{\sqrt{x^2+1} + x}{\sqrt{x^2+1}(x + \sqrt{x^2+1})} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

$> 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$; quindi f è strett. crescente.

Poiché $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua, strett. monotona e $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$,
 risulta che $f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è ben definita.

Pertanto la sua espressione analitica, $\forall y \in \mathbb{R}$ risolviamo l'eq.

$$\log(x + \sqrt{x^2 + 1}) = y. \text{ Allora } \log(x + \sqrt{x^2 + 1}) = y \Leftrightarrow (x + \sqrt{x^2 + 1}) = e^y$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 1} = e^y - x \Leftrightarrow x^2 + 1 = e^{2y} - 2e^y x + x^2 \Leftrightarrow \frac{e^{2y} - 1}{2e^y} = x$$

Possiamo allora affermare che $f^{-1}(x): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$f^{-1}(x) = \frac{e^{2x} - 1}{2e^x}$ è la funzione inversa cercata. ■

5) No! Infatti, se f è continua su $[0,1]$ e derivabile su $]0,1[$, dal teorema del valor medio (o di Lagrange) segue che $\exists c \in]0,1[$ tale che

$$\frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = f'(c).$$

Poiché $f(0) = -1$ e $f(1) = 1$, risulta che

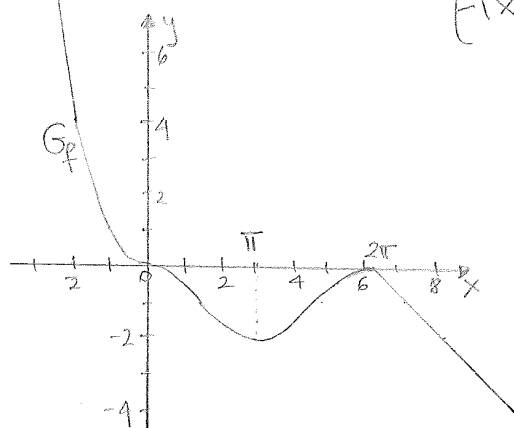
$$1 - (-1) = 2 = f'(c) \quad c \in]0,1[,$$

che è in contraddizione con l'ipotesi che $f'(x) < 2 \quad \forall x \in]0,1[$



6) i) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x < 0 \\ \cos x - 1 & \text{se } 0 \leq x < 2\pi \\ -|x - 2\pi| & \text{se } x \geq 2\pi \end{cases}$$



• f è continua in $\mathbb{R}$: basta controllare

la continuità di f nei pt. $x=0$ e $x=2\pi$.

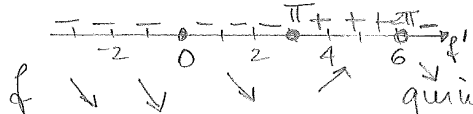
$$\lim_{x \rightarrow 0^-} x^2 = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\cos x - 1) = f(0) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 2\pi^-} (\cos x - 1) = \lim_{x \rightarrow 2\pi^+} (-|x - 2\pi|) = f(2\pi) = 0$$



$$f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{se } x < 0 \\ -\sin x & \text{se } 0 \leq x < 2\pi \\ -1 & \text{se } x \geq 2\pi \end{cases} \quad \left(\text{nota } f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} 2x = 0 \right)$$

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-\sin x) = 0$$



quindi $f'(0) = 0$ ed f è derivabile in $x=0$.

$$\text{D'altra parte } f'_-(2\pi) = \lim_{x \rightarrow 2\pi^-} (-\sin x) = 0, \quad f'_+(2\pi) = \lim_{x \rightarrow 2\pi^+} (-1) = -1$$

e quindi $\nexists f'(2\pi)$. f non è derivabile in $x=2\pi$ e $x=2\pi$ è pt. angoloso per f .

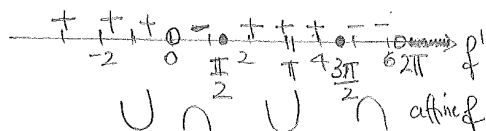
• f' è continua su $\text{dom } f' = \mathbb{R} \setminus \{2\pi\}$;

$$f''(x) = \begin{cases} 2 & \text{se } x < 0 \\ -\cos x & \text{se } 0 < x < 2\pi \\ 0 & \text{se } x > 2\pi \end{cases} \quad \text{inoltre } f''_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f''(x) = 2$$

$$f''_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-\cos x) = -1$$

$$\Rightarrow \nexists f''(0). \text{ Analogamente } f''(2\pi) \nexists$$

poiché f non è derivabile in $x=2\pi$.



ii) $x=\pi$ è pt. di min. loc. (shello) per f $f(\pi)=-2$.

$x=2\pi$ è pt. di max. loc. (shello) per f $f(2\pi)=0$. $\square$

iii) $x=0$, $x=\frac{\pi}{2}$, $x=\frac{3\pi}{2}$ sono punti di flesso.

si ha $f''(x)=0$ solo nei pt. $x=\frac{\pi}{2}$ e $x=\frac{3\pi}{2}$. $\square$

iv) f' si annulla in $x=0$ (punto di flesso) e in $x=\pi$ (punto di minimo loc.) $\blacksquare$

7) $f(x) = \frac{x}{x^3-1}$

• $\text{dom } f = \mathbb{R} \setminus \{1\} =]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[;$

• nessuna simmetria evidente;

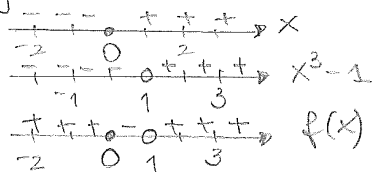
• $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ $y=0$ è asintoto orizzontale per f , per $x \rightarrow -\infty$;

$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$ $x=1$ è asintoto verticale per f ;

$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$ "

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ $y=0$ è asintoto orizzontale per f , per $x \rightarrow +\infty$.

• segno di f :



• f è continua su $\text{dom } f$ (somma e rapporto di fnz. continue)

• $\text{dom } f' = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

$$f'(x) = \frac{x^3-1 - x(3x^2)}{(x^3-1)^2} = \frac{-2x^3-1}{(x^3-1)^2}$$

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow x^3 = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = -\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$$

$$f\left(-\sqrt[3]{\frac{1}{2}}\right) = -\frac{1}{\sqrt[3]{2}\left(-\frac{1}{2}-1\right)} = \frac{2}{3\sqrt[3]{2}}$$

$$-2x^3-1$$

$$(x^3-1)^2$$

$$f'(x)$$

$$f(x)$$

$$x = -\sqrt[3]{\frac{1}{2}} \text{ è}$$

pt. di max. loc. (shello) per f .

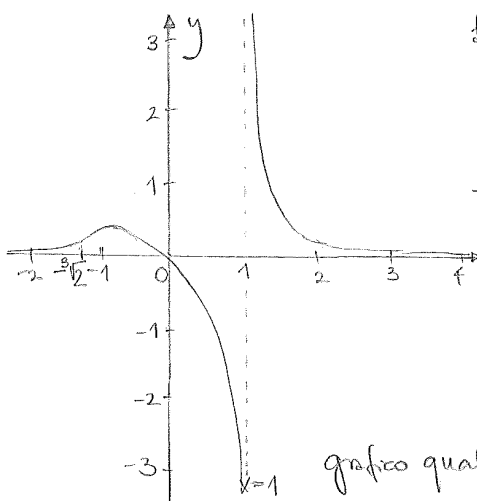


grafico qualitativo di f .

$$\text{dom } f'' = \text{dom } f' \quad f''(x) = \frac{6x^2(x^3+2)}{(x^3-1)^3}$$

$$f''(x)$$

$x = -\sqrt[3]{2}$ pt. di flesso per f

$\square$

$$f(x) = \frac{2x^2}{x+1}$$

- $\text{dom } f = \mathbb{R} \setminus \{-1\} =]-\infty, -1[\cup]-1, +\infty[$;
- nessuna simmetria evidente ;

• $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

Oss. che $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = 2 = a$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - 2x] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{2x^2 - 2x(x+1)}{x+1} \right] = \frac{-2}{+\infty} = b$

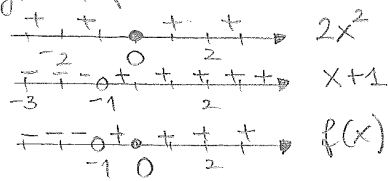
$y = 2x - 2$ è asintoto obliquo per f , per $x \rightarrow -\infty$;

$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -\infty$

$x = -1$ è asintoto verticale per f ;

$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = +\infty$

• segno di f :

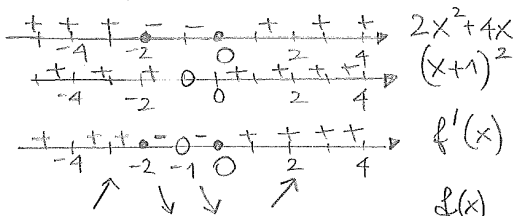


• f è continua su $\text{dom } f$ (somma e rapporto di funz. continue)

• $\text{dom } f' = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

$$f'(x) = \frac{4x(x+1) - 2x^2}{(x+1)^2} = \frac{2x^2 + 4x}{(x+1)^2} = \frac{2x(x+2)}{(x+1)^2}$$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0, x = -2$ pt. critici per f



$x = -2$ pt. di max loc. (stretto) per f

$f(x) \quad f(-2) = \frac{8}{-1} = -8$

$x = 0$ pt. di min. loc. (stretto) per f
 $f(0) = 0$

$$f''(x) = \frac{(4x+4)(x+1)^2 - (2x^2+4x)2(x+1)}{(x+1)^3} =$$

$$= \frac{4x^2 + 8x + 4 - 4x^2 - 8x}{(x+1)^3} = \frac{4}{(x+1)^3}$$

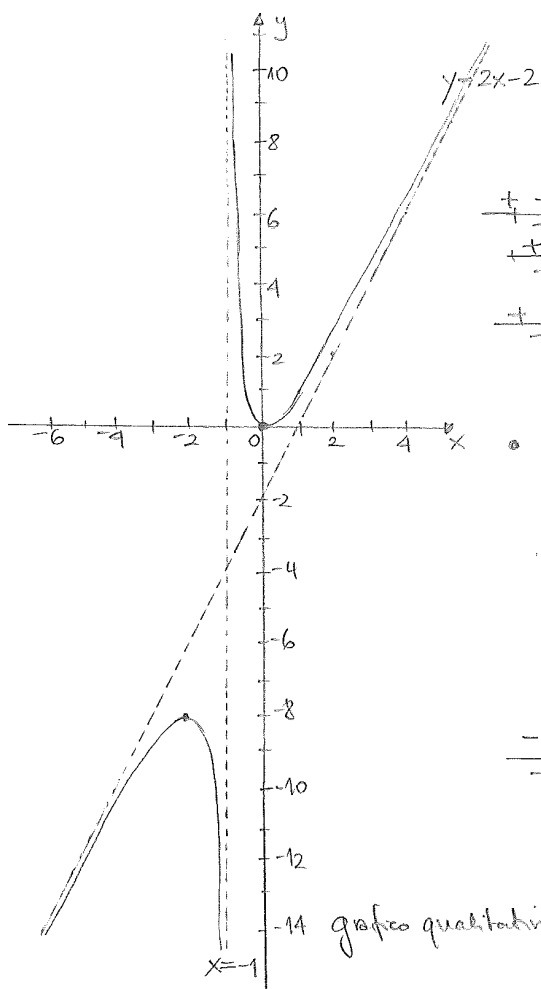
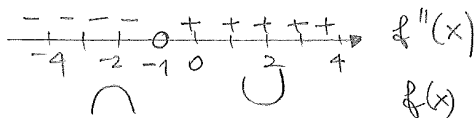


grafico qualitativo di f .



$$f(x) = \frac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}$$

- $\text{dom } f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} =]-\infty, -1[\cup]-1, 1[\cup]1, +\infty[;$
- $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ è un insieme simmetrico rispetto all'origine.

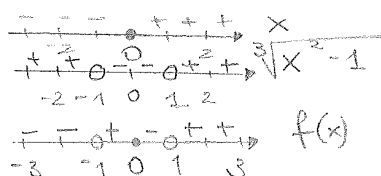
Inoltre $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ si ha $f(-x) = -f(x)$, ossia f è dispari.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = +\infty \quad \begin{array}{l} x = -1 \text{ asintoto} \\ \text{verticale per } f \end{array}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty \quad \begin{array}{l} x = 1 \text{ asintoto} \\ \text{verticale per } f \end{array}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

- segno di f :



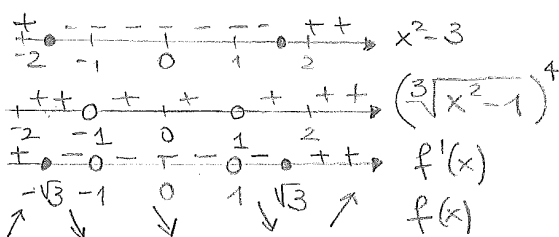
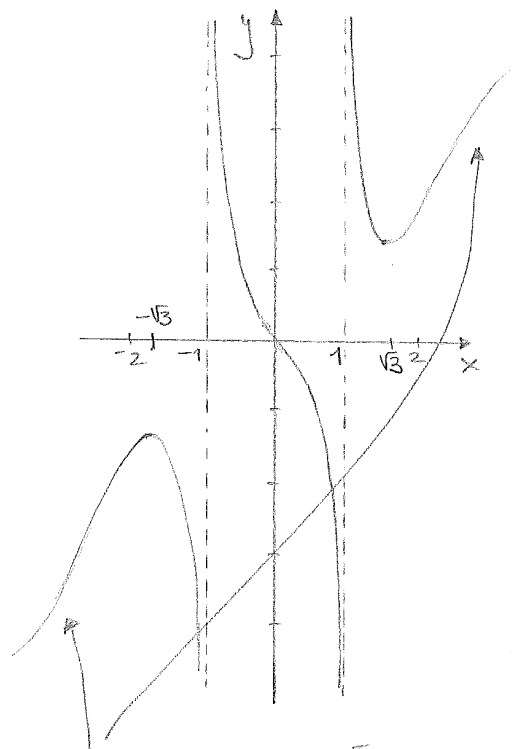
$\sqrt[3]{x^2-1}$ ha il segno di x^2-1

- f è continua su $\text{dom } f$;

$$\text{dom } f' = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} \quad f'(x) = \frac{\sqrt[3]{x^2-1} - x \cdot \frac{1}{3}(x^2-1)^{-2/3} \cdot 2x}{(\sqrt[3]{x^2-1})^2} =$$

$$= \frac{x^2-1 - \frac{2}{3}x^2}{(\sqrt[3]{x^2-1})^4} = \frac{x^2-3}{3(\sqrt[3]{x^2-1})^4}$$

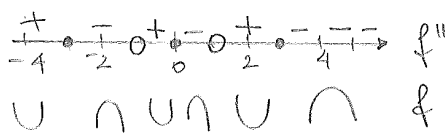
$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x_{1/2} = \pm\sqrt{3} \text{ pt. critici di } f$$



$$x = -\sqrt{3} \text{ pt. di max loc (stretto) di } f \quad f(-\sqrt{3}) = \frac{-\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}}$$

$$x = \sqrt{3} \text{ pt. di min loc (stretto) di } f \quad f(\sqrt{3}) = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}} \quad \sim 1.1$$

$$\text{dom } f'' = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} \quad f''(x) = \frac{2x(9-x^2)}{9(\sqrt[3]{x^2-1})^7}$$



$x = 0, -3, 3$
pt. di flesso per f

questo comportamento è dovuto al fatto che $f(x) \sim \sqrt[3]{x}$ per $x \rightarrow +\infty$ ($-\infty$)

$$f(x) = x^3 e^{-x}$$

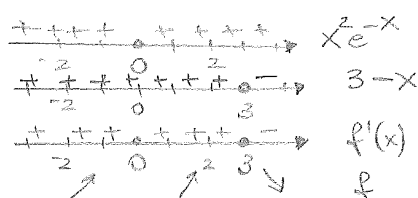
- $\text{dom } f = \mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$
- nessuna simmetria evidente
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{e^x} = 0$ $y=0$ asintoto orizzontale per f , per $x \rightarrow +\infty$.

- segno di f : $\begin{array}{c} - - - + + + \\ -2 \quad 0 \quad 2 \end{array} \rightarrow f$ poiché $e^x > 0 \forall x \in \mathbb{R}$

- f continua su $\mathbb{R}$ (composizione e prodotto di funz. continue)

- $\text{dom } f' = \mathbb{R}$ $f'(x) = 3x^2 e^{-x} - x^3 e^{-x} = x^2(3-x)e^{-x}$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0, x = 3 \text{ pt. critici di } f$$



$x = 3$ pt. di max. loc (glob.) per f

$$f(3) = \frac{27}{e^3} \approx 1.3$$

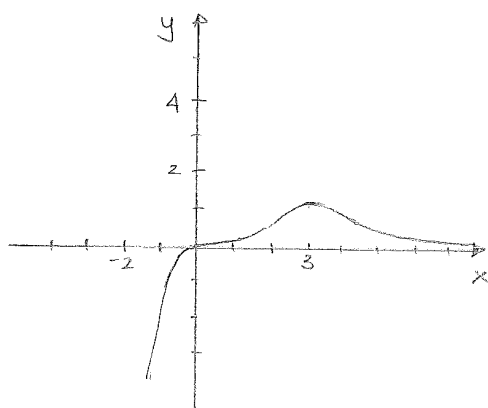
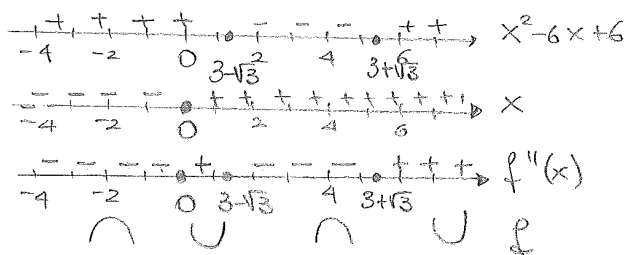


grafico qualitativo di f .

- $\text{dom } f'' = \mathbb{R}$ $f''(x) = 2x e^{-x}(3-x) - x^2 e^{-x}(3-x) - x^2 e^{-x}$

$$= \frac{x}{e^x} [6 - 2x - 3x + x^2 - x]$$

$$= \frac{x}{e^x} [x^2 - 6x + 6]$$



$x \neq 0, x = 3 \pm \sqrt{3}$ punti di flesso per f .

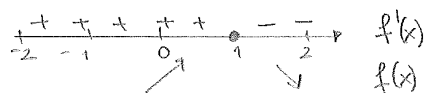
$$f(x) = e^{-x^2+2x}$$

- $\text{dom } f = \mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$
- si può osservare che $e^{-x^2+2x} = e^{-(x^2-2x)} = e^{-(x-1)^2+1} = e \cdot e^{-(x-1)^2}$ quindi il G_f è simmetrico rispetto alla retta $x=1$.
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ $y=0$ asintoto orizzontale per f , per $x \rightarrow -\infty$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ $y=0$ asintoto orizzontale per f , per $x \rightarrow +\infty$;

- Segno di f : sempre positivo!

- f continua in $\mathbb{R}$ (somma, composizione di funzioni continue in $\mathbb{R}$)
- dom $f' = \mathbb{R}$ $f'(x) = (-2x+2)e^{-x^2+2x}$

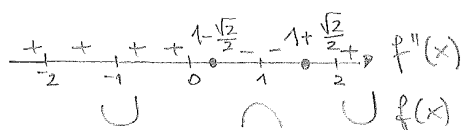
$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \quad \text{pt. critico di } f \quad f(1) = e$$



$x=1$ pt. di max. loc. (stretto) per f

- dom $f'' = \mathbb{R}$ $f''(x) = -2e^{-x^2+2x} + (-2x+2)^2 e^{-x^2+2x}$

$$= e^{-x^2+2x} [4x^2 - 8x + 2] = 2(2x^2 - 4x + 1)e^{-x^2+2x}$$



$x = 1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$ pt. di flesso per f .

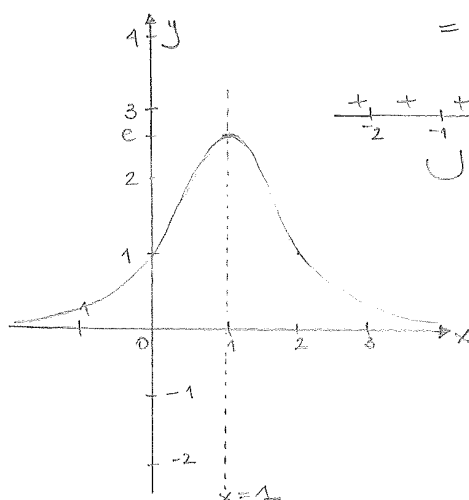


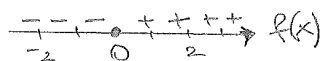
grafico qualitativo di f .



$$f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$$

- dom $f = \mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$
- è dispari! $f(-x) = -f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}!$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$ $y = -1$ asintoto orizzontale per f , per $x \rightarrow -\infty$;
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ $y = 1$ asintoto orizzontale per f , per $x \rightarrow +\infty$;

- segno di f



- continuità di f su tutto $\mathbb{R}$ (somma e rapporto di funz. continue; il denominatore non si annulla mai)

- dom $f' = \mathbb{R}$

$$f'(x) = \frac{e^x(e^x+1) - (e^x-1)e^x}{(e^x+1)^2} = \frac{2e^x}{(e^x+1)^2} > 0$$

f risulta strett. crescente in $\mathbb{R}$.

- dom $f'' = \mathbb{R}$

$$f''(x) = 2 \frac{e^x(e^x+1)^2 - e^x \cdot 2(e^x+1)e^x}{(e^x+1)^3} = 2 \frac{-e^{2x} + e^x}{(e^x+1)^3}$$

$$f''(x) = \frac{2e^x(-e^x+1)}{(e^x+1)^3}$$

$$f''(x)$$

$x=0$ pt. di flesso per f .

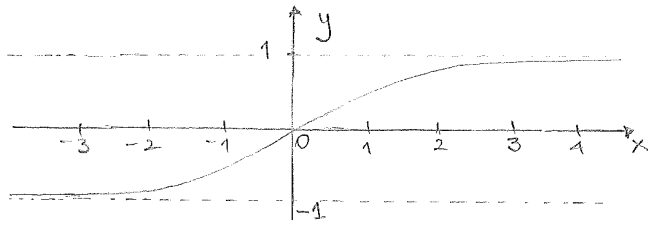


grafico qualitativo di f $\square$

$$f(x) = \log\left(\frac{1}{x^2+1}\right)$$

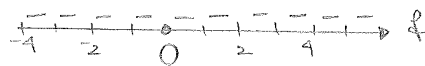
$$= -\log(x^2+1)$$

• $\text{dom } f = \mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$

• f è pari in $\mathbb{R}$.

• $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$

• segno di f



oss. che $\frac{1}{x^2+1} \leq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$e = 1 \Leftrightarrow x = 0$.

• f è continua in $\mathbb{R}$.

• $\text{dom } f' = \mathbb{R} \quad f'(x) = \frac{-2x}{(x^2+1)^2} = \frac{-2x}{x^2+1}$



$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ pt. critico di f
 $f(0) = 0$

$x=0$ pt. di max. loc. (stretto) per f .

• $\text{dom } f'' = \mathbb{R} \quad f''(x) = \frac{-2(x^2+1) + 2x \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{2x^2-2}{(x^2+1)^2}$

$$f''(x)$$

$$f(x)$$

$x = \pm 1$ pt. di flesso per f .

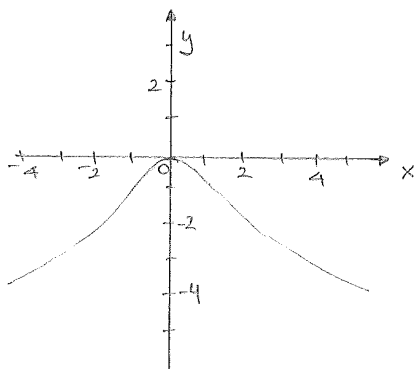


grafico qualitativo di f .

$\square$

$$f(x) = x^2(\log x - 1)$$

$$\bullet \text{ dom } f =]0, +\infty[$$

• nessuna simmetria evidente

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0 \quad \left(\text{il } \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 \log x \text{ si risolve usando il teor. di de l'Hôpital} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

• segno di f



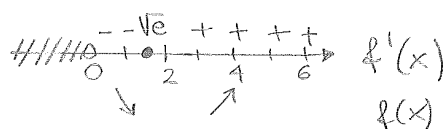
• f continua in $]0, +\infty[$ essendo prodotto di funzioni continue in $]0, +\infty[$.

$$\bullet \text{ dom } f' =]0, +\infty[$$

$$f'(x) = 2x(\log x - 1) + x^2 \cdot \frac{1}{x}$$

$$= 2x \log x - 2x + x = x(2 \log x - 1)$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{e} \text{ pt. critico di } f$$

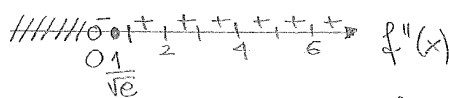


Notiamo che
 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = 0!$

$$x = \sqrt{e} \text{ pt. di min. loc. (stretto) per } f \quad f(\sqrt{e}) = -\frac{e}{2} \sim -1.3$$

$$\bullet \text{ dom } f'' =]0, +\infty[$$

$$f''(x) = (2 \log x - 1) + x \cdot \frac{2}{x} = 2 \log x + 1$$



$$x = \frac{1}{\sqrt{e}} \text{ pt. di flesso per } f.$$

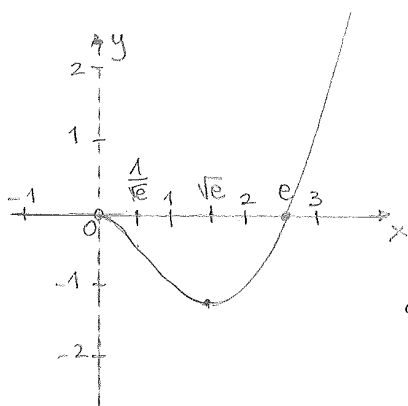


grafico qualitativo di f .

□

$$f(x) = \frac{x}{\log x}$$

$$\bullet \text{ dom } f =]0, +\infty[\setminus \{1\} =$$

$$=]0, 1[\cup]1, +\infty[$$

• nessuna simmetria evidente

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty \quad x = 1 \text{ asintoto verticale per } f$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

• f continua nel suo dominio (solito!)

• $\text{dom } f' = \text{dom } f$

$$f'(x) = \frac{1}{1 + \left(\frac{e^x + 1}{e^x - 1}\right)^2} \cdot \frac{e^x(e^x - 1) - (e^x + 1)e^x}{(e^x - 1)^2} =$$

$$= \frac{1}{(e^x - 1)^2 + (e^x + 1)^2} \cdot (e^{2x} - e^x - e^{2x} - e^x) = \frac{-2e^x}{(e^x - 1)^2 + (e^x + 1)^2}$$

$f'(x) < 0$ e quindi f è decrescente su $]-\infty, 0[$ e decrescente su $]0, +\infty[$

$$f'(x) = \frac{-2e^x}{e^{2x} + 1}$$

• $\text{dom } f'' = \text{dom } f$

$$f''(x) = \frac{-e^x(e^{2x} + 1) + e^x \cdot e^{2x} \cdot 2}{(e^{2x} + 1)^2} = \frac{e^x(e^{2x} - 1)}{(e^{2x} + 1)^2}$$

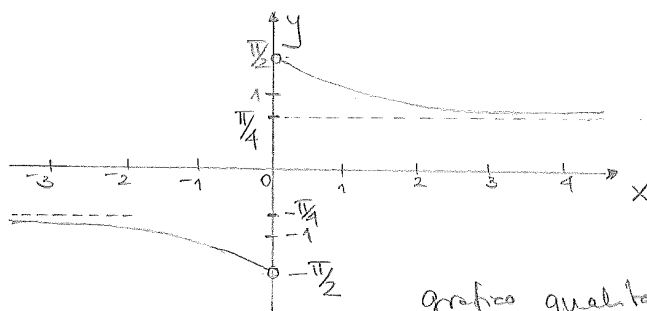


grafico qualitativo di f

