

Università di Trento - Dip. di Ingegneria e Scienza dell'Informazione
 CdL in Informatica - CdL in Ingegneria Elettronica e delle Telecomunicazioni
 CdL in Ingegneria dell'Informazione e Gestione d'Impresa
 ESAME SCRITTO DI ANALISI MATEMATICA 1
 a.a. 2014-2015 - Trento, 3 febbraio 2015

(A) 1)
$$\begin{cases} w^2 + i\bar{w} + z - \bar{z} = 2 \ln(-1+i) \\ |z|^2 - z^2 = 0 \end{cases}$$

Oss. che $|z|^2 - z^2 = 0 \Leftrightarrow z\bar{z} - z^2 = 0 \Leftrightarrow z(\bar{z} - z) = 0$

$\Leftrightarrow z = 0$ o $z = \bar{z}$; quindi $z = a \in \mathbb{R}$ sono tutte e sole le soluzioni della 2^a eq. La prima eq. diventa allora

$w^2 + i\bar{w} = 2 \ln(-1+i)$, ossia $w^2 + i\bar{w} = 2$.

Poniamo allora $w = x + iy$, con $x, y \in \mathbb{R}$ da determinare. Si ha

$w^2 + i\bar{w} - 2 = 0 \Leftrightarrow (x^2 + 2xyi - y^2) + i(x - iy) - 2 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - y^2 + y - 2 + i(2xy + x) = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 + y - 2 = 0 \\ 2xy + x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 + y - 2 = 0 \\ x(2y + 1) = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ -y^2 + y - 2 = 0 \end{cases} \text{ o } \begin{cases} 2y + 1 = 0 \\ x^2 - y^2 + y - 2 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \emptyset \end{cases} \text{ o } \begin{cases} y = -\frac{1}{2} \\ x^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -\frac{1}{2} \\ x = \pm \frac{\sqrt{11}}{2} \end{cases}$

Le soluzioni (z, w) sono dunque $(a, -\frac{\sqrt{11}}{2} - \frac{1}{2}i)$, $(a, \frac{\sqrt{11}}{2} - \frac{1}{2}i)$ al variare di $a \in \mathbb{R}$. ■

2)
$$f(x) = \begin{cases} \int_0^{x^2+2x} e^{t^2} dt + a(x-1) & \text{se } x \leq 0 \\ b(1 + \log(1+x)) & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

Imponendo la continuità in $x=0$ si ottiene $-a = b$. La funzione è derivabile in ogni pt. escluso al più il punto di secondo $x=0$, con

$$f'(x) = \begin{cases} e^{(x^2+2x)^2} (2x+2) + a & \text{se } x < 0 \\ \frac{b}{1+x} & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

(nel calcolo di $f'(x)$ per $x < 0$ si è usato il fatto che $(\int_0^{a(x)} g(t) dt)' = g(a(x))a'(x)$)

per g continua e $a(x)$ derivabile). Sia $a = -b$, così che f è continua in $x=0$. Per studiare la derivabilità in $x=0$ calcoliamo il limite per x che tende a zero della funzione $f'(x)$. Per un controllo del teorema di de l'Hopital, se tale limite esiste ed è uguale a $l \in \mathbb{R}$, allora f è derivabile in 0 e $f'(0) = l$.

Essendo

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = 2-b, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = b,$$

vediamo che f è derivabile in $x=0$ se e solo se $2-b=b$, ossia $b=1$.

Concludiamo che f è continua e derivabile in $\mathbb{R}$ se e solo se $a=-1$ e $b=1$. ■

3) i) $\int_0^1 \frac{e^x}{e^{2x}+6e^x+9} dx$ (*) Osserviamo innanzitutto che $\int \frac{e^x}{e^{2x}+6e^x+9} dx = \int \frac{dt}{t^2+6t+9}$
 $\uparrow$
 $e^x = t$

Ora $\int \frac{dt}{(t+3)^2} = -\frac{1}{t+3} + C$ e quindi

$$\int \frac{e^x}{e^{2x}+6e^x+9} dx = -\frac{1}{e^x+3} + C, \text{ al variare di } C \in \mathbb{R}.$$

Possiamo concludere che

$$\int_0^1 \frac{e^x}{e^{2x}+6e^x+9} = \left[-\frac{1}{e^x+3} \right]_0^1 = \underline{\underline{\frac{1}{4} - \frac{1}{e+3}}}.$$

□

ii) $\int_0^{+\infty} \frac{x - \sin x}{[x^2(x+1)]^\alpha} dx$: poniamo $f(x) = \frac{x - \sin x}{[x^2(x+1)]^\alpha}$ continua in $]0, +\infty[$.

Inoltre, essendo $x > \sin x \quad \forall x > 0$ si ha anche che $f(x) > 0 \quad \forall x > 0$.

Osserviamo che

$$f(x) \sim \frac{\frac{x^3}{6}}{x^{2\alpha}} = \frac{1}{6x^{2\alpha-3}} \quad \text{per } x \rightarrow 0^+$$

mentre

$$f(x) \sim \frac{x}{x^{2\alpha} x^\alpha} = \frac{1}{x^{3\alpha-1}} \quad \text{per } x \rightarrow +\infty.$$

(*) Anche senza sostituzione $\int_0^1 \frac{e^x}{(e^x+3)^2} dx = \left[-\frac{1}{e^x+3} \right]_0^1 = \frac{1}{4} - \frac{1}{e+3}. \quad \square$

Per il criterio del confronto asintotico, l'integrale dato risulta convergente se e solo se $2\alpha - 3 < 1$ e $3\alpha - 1 > 1$, ossia $\boxed{\frac{2}{3} < \alpha < 2}$.

iii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{2n^2+3} (\log x)^n$: poniamo $t = \log x$ e $x > 0$. Abbiamo allora
 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{2n^2+3} t^n$. Ovvero $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{e^{n+1}}{2(n+1)^2+3} \cdot \frac{2n^2+3}{e^n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e$
 e quindi il raggio di convergenza della serie di potenze $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{2n^2+3} t^n$

è $r = \frac{1}{e}$. Notiamo che

se $t = \frac{1}{e}$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{2n^2+3} \frac{1}{e^n}$ converge, poiché $\frac{1}{2n^2+3} \sim \frac{1}{2n^2}$ per $n \rightarrow +\infty$
 e la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty$;

se $t = -\frac{1}{e}$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{2n^2+3} \frac{(-1)^n}{e^n}$ converge, poiché è assolutamente convergente.

Quindi, ricordando che $t = \log x$, $x > 0$ si ha che l'insieme di convergenza è dato dagli $x > 0$: $-\frac{1}{e} \leq \log x \leq \frac{1}{e}$, ossia $x \in \left[e^{-\frac{1}{e}}, e^{\frac{1}{e}} \right]$. ■

4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin 2x + e^{3x} - 9 \log(1+x) + 2x - 1}{2x^2}$:

basta osservare che $\sin 2x = 2x - \frac{(2x)^3}{6} + o(x^3)$ per $x \rightarrow 0$

$$e^{3x} = 1 + 3x + \frac{(3x)^2}{2} + o(x^2) \quad \text{per } x \rightarrow 0$$

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \quad \text{per } x \rightarrow 0$$

e quindi $\frac{2 \sin 2x + e^{3x} - 9 \log(1+x) + 2x - 1}{2x^2} =$

$$= \frac{\cancel{2x} + o(x^2) + \cancel{1} + \cancel{3x} + \frac{9x^2}{2} + o(x^2) - \cancel{9x} + \frac{9x^2}{2} + o(x^2) + \cancel{2x} - \cancel{1}}{2x^2}$$

$$= \frac{9x^2 + o(x^2)}{2x^2} \quad \text{per } x \rightarrow 0.$$

Risulta allora $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin 2x + e^{3x} - 9 \log(1+x) + 2x - 1}{2x^2} = \underline{\underline{\frac{9}{2}}}$. (*) ■

5) $y' = -(\sin x)y + e^{\cos x}$ è un'eq. diff. lineare del 1° ordine a coeff. variabili. Poiché

$A(x) = \cos x$ è una primitiva di $a(x) = -\sin x$, la soluzione generale dell'eq. diff. data

(*)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 \cos 2x + 3e^{3x} - \frac{9}{1+x} + 2}{4x} = \left[\frac{0}{0} \right] \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(f')'}{(g')'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-8 \sin 2x + 9e^{3x} + \frac{9}{(1+x)^2}}{4} = \frac{9}{2} \text{ e usando il criterio di de l'Hospital si conclude. } \blacksquare$$

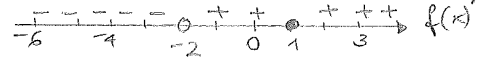
è $y(x) = e^{\cos x} \left(c + \int_0^x e^{\cos t} e^{-\cos t} dt \right) = e^{\cos x} (c + x)$, dove $c \in \mathbb{R}$.
 $0 \leftarrow$ scelto arbitrariamente nel dominio di $a(x)$ e $b(x) = e^{\cos x}$

Imponendo $y(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2}$, si ha $\frac{\pi}{2} = e^0 (c + \frac{\pi}{2})$, ossia $c = 0$. Dunque, la soluzione del probl. di Cauchy dato è $y(x) = x e^{\cos x}$ $x \in \mathbb{R}$. ■

6) $f(x) = \operatorname{arctg} \left(\frac{|x-1|}{x+2} \right)$ • $\operatorname{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{-2\} =]-\infty, -2[\cup]-2, +\infty[$.
 • simmetrie: nessuna simmetria evidente.

• Segno di f : $f(x) = 0 \Leftrightarrow x-1=0$, $f(x) > 0$ se $x > -2, x \neq 1$ (nota: $\operatorname{arctg} x$ conserva
 $f(x) < 0$ se $x < -2$ il segno di x)

Oss. che $f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg} \left(\frac{x-1}{x+2} \right) & \text{se } x \geq 1 \\ \operatorname{arctg} \left(\frac{1-x}{x+2} \right) & \text{se } x < 1, x \neq -2. \end{cases}$



• $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{arctg} \left(\frac{1-x}{x+2} \right) = -\frac{\pi}{4}$
 $\searrow -1$

$y = -\frac{\pi}{4}$ asintoto orizzontale per f ,
 per $x \rightarrow -\infty$.

$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^-} \operatorname{arctg} \left(\frac{1-x}{x+2} \right) = -\frac{\pi}{2}$
 $\searrow -\infty$

$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} \operatorname{arctg} \left(\frac{1-x}{x+2} \right) = \frac{\pi}{2}$
 $\searrow +\infty$

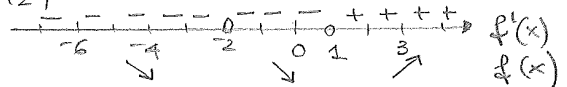
$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{arctg} \left(\frac{x-1}{x+2} \right) = \frac{\pi}{4}$
 $\searrow 1$

$y = \frac{\pi}{4}$ asintoto orizzontale per f , per $x \rightarrow +\infty$.

• Continuità di f in $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ (composizione, rapporto di funzioni continue).

• $\operatorname{dom} f' = \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}$ $f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{1 + \left(\frac{x-1}{x+2}\right)^2} \cdot \frac{(x+2) - (x-1)}{(x+2)^2} = \frac{3}{2x^2 + 2x + 5} & \text{se } x > 1 \\ \frac{1}{1 + \left(\frac{1-x}{x+2}\right)^2} \cdot \frac{-(x+2) - (1-x)}{(x+2)^2} = \frac{-3}{2x^2 + 2x + 5} & \text{se } x < 1, x \neq -2 \end{cases}$

Nono pt. critica. Inoltre,



essendo f continua in $x=1$, si ha
 $f'_-(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = -\frac{1}{3}$ e $f'_+(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) = \frac{1}{3}$. Infine $\lim_{x \rightarrow -2^-} f'(x) = -\frac{1}{3}$ e $\lim_{x \rightarrow -2^+} f'(x) = \frac{1}{3}$.

• $\operatorname{dom} f'' = \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}$ $f''(x) = \begin{cases} \frac{-3(4x+2)}{(2x^2+2x+5)^2} & \text{se } x > 1 \\ \frac{+3(4x+2)}{(2x^2+2x+5)^2} & \text{se } x < 1, x \neq -2 \end{cases}$

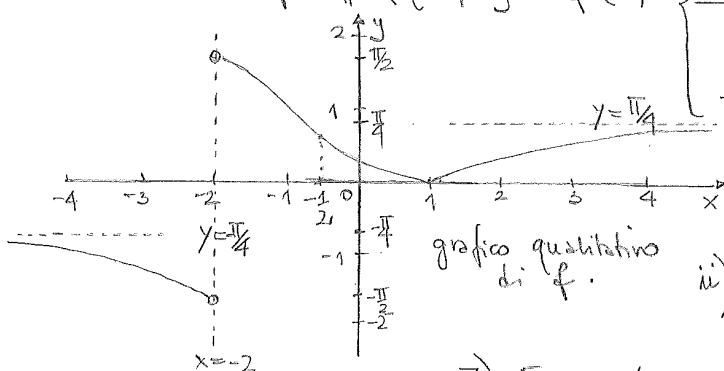
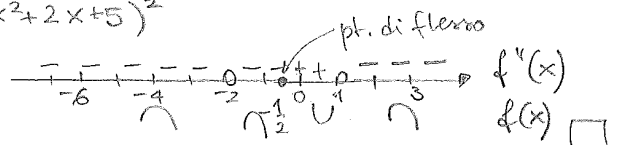


grafico qualitativo di f .



pt. di flesso

ii) $f(x) = k$ ha esattamente due soluzioni se e solo se $0 < k < \frac{\pi}{4}$. ■

7) Enunciate e provate la formula della derivata del prodotto. ■

(B) 1)
$$\begin{cases} z^2 + i\bar{z} + w - \bar{w} = 3 \operatorname{Im}(-1+2i) \\ |w|^2 - w^2 = 0 \end{cases}$$

Oss. che $|w|^2 - w^2 = 0 \Leftrightarrow w\bar{w} - w^2 = 0 \Leftrightarrow w(\bar{w} - w) = 0 \Leftrightarrow w = 0$ o $w = \bar{w}$;

quindi $w = a \in \mathbb{R}$ sono tutte e sole le soluzioni della 2^a eq. La prima eq. diventa

allora $z^2 + i\bar{z} = 3 \operatorname{Im}(-1+2i)$, ossia $z^2 + i\bar{z} = 6$.

Poniamo allora $z = x + iy$, con $x, y \in \mathbb{R}$ da determinare. Si ha $z^2 + i\bar{z} - 6 = 0$

$\Leftrightarrow (x^2 + 2xyi - y^2) + i(x - iy) - 6 = 0 \Leftrightarrow x^2 - y^2 + y - 6 + i(2xy + x) = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 + y - 6 = 0 \\ 2xy + x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 + y - 6 = 0 \\ x(2y + 1) = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ -y^2 + y - 6 = 0 \end{cases} \quad \text{o} \quad \begin{cases} 2y + 1 = 0 \\ x^2 - y^2 + y - 6 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \emptyset \end{cases} \quad \text{o} \quad \begin{cases} y = -\frac{1}{2} \\ x^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -\frac{1}{2} \\ x = \pm \frac{\sqrt{27}}{2} = \pm \frac{3\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

Le soluzioni (z, w) sono dunque $\left(-\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i, a\right)$, $\left(\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i, a\right)$ al variare di $a \in \mathbb{R}$. ■

2)

$$f(x) = \begin{cases} a(1 + \log(1-x)) & \text{se } x < 0 \\ \int_0^{x^2+4x} e^{t^2} dt + b(x+1) & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$$

Imponendo la continuità in $x=0$ si ottiene $a=b$. La funzione è derivabile in ogni punto escluso al più il punto di ricordo $x=0$, con

$$f'(x) = \begin{cases} -\frac{a}{1-x} & \text{se } x < 0 \\ e^{(x^2+4x)^2} (2x+4) + b & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

(nel calcolo di $f'(x)$ per $x > 0$ si è usato il fatto che $\left(\int_0^{a(x)} g(t) dt\right)' = g'(a(x))a'(x)$ per g continua e $a(x)$ derivabile). Sia $a=b$, con che f è continua in $x=0$. Per studiare la derivabilità in $x=0$ calcoliamo il limite per x che tende a 0 della funzione $f'(x)$. Per un corollario del teorema di de l'Hôpital, se tale limite esiste ed è uguale a $l \in \mathbb{R}$, allora f è derivabile in 0 e $f'(0)=l$.

Essendo

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = -b, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = 4 + b,$$

vediamo che f è derivabile in $x=0$ se e solo se $-b=4+b$, ossia $b=-2$.
Concludiamo che f è continua e derivabile in $\mathbb{R}$ se e solo se $a=b=-2$. $\blacksquare$

3) i) $\int_0^1 \frac{e^x}{e^{2x} + 4e^x + 4} dx$. $\textcircled{*}$ Osserviamo innanzitutto che $\int \frac{e^x}{e^{2x} + 4e^x + 4} dx = \int \frac{dt}{t^2 + 4t + 4}$
 $e^x = t$

Ora $\int \frac{dt}{(t+2)^2} = -\frac{1}{t+2} + C$ e quindi

$\int \frac{e^x}{e^{2x} + 4e^x + 4} dx = -\frac{1}{e^x + 2} + C$, al variare di $C \in \mathbb{R}$.

Possiamo concludere che $\int_0^1 \frac{e^x}{e^{2x} + 4e^x + 4} dx = \left[-\frac{1}{e^x + 2} \right]_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{e+2}$. $\square$

ii) $\int_0^{+\infty} \frac{x - \min x}{[x^3(x+2)]^\beta} dx$: poniamo $f(x) = \frac{x - \min x}{[x^3(x+2)]^\beta}$ continua in $]0, +\infty[$.

Inoltre, essendo $x > \min x \ \forall x > 0$, si ha anche che $f(x) > 0 \ \forall x > 0$.

Osserviamo che

$f(x) \sim \frac{x^{3/6}}{x^{3\beta}} = \frac{1}{6x^{3\beta-3}}$ per $x \rightarrow 0^+$,

mentre

$f(x) \sim \frac{x}{x^{3\beta} x^\beta} = \frac{1}{x^{4\beta-1}}$ per $x \rightarrow +\infty$.

Per il criterio del confronto asintotico, l'integrale dato risulta convergente

se e solo se $3\beta-3 < 1$ e $4\beta-1 > 1$, ossia $\boxed{\frac{1}{2} < \beta < \frac{4}{3}}$. $\square$

iii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n+3}{e^n} (\log x)^n$: poniamo $t = \log x$ e $x > 0$. Abbiamo allora

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n+3}{e^n} t^n$. Ovviamente $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{5(n+1)+3}{e^{n+1}} \cdot \frac{e^n}{5n+3} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{e}$

e quindi il raggio di convergenza della serie di potenze $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n+3}{e^n} t^n$

è $r=e$. Notiamo che

se $t=e$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(5n+3) \cdot e^n}{e^n}$ non converge, poiché $(5n+3) \not\rightarrow 0$;
e analog. per $t=-e$.

Quindi, ricordando che $t = \log x$, $x > 0$, si ha che l'intervallo di convergenza

è dato dagli $x > 0$: $-e < \log x < e$, ossia $x \in]\frac{1}{e^e}, e^e[$. $\blacksquare$

$\textcircled{*}$ Anche senza sostituzione $\int_0^1 \frac{e^x}{(e^x+2)^2} dx = \left[-\frac{1}{e^x+2} \right]_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{e+2}$. $\square$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4e^{5x} + \log(1+10x) - 4\cos x - 30x}{5x^2} :$$

basta osservare che $e^{5x} = 1 + 5x + \frac{(5x)^2}{2} + o(x^2)$ per $x \rightarrow 0$

$\log(1+10x) = 10x - \frac{(10x)^2}{2} + o(x^2)$ per $x \rightarrow 0$

$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ per $x \rightarrow 0$

e quindi $\frac{4e^{5x} + \log(1+10x) - 4\cos x - 30x}{5x^2} =$

$$= \frac{\cancel{4} + \cancel{20}x + \cancel{50}x^2 + o(x^2) + \cancel{10}x - \cancel{50}x^2 + o(x^2) - \cancel{4} + \cancel{2}x^2 + o(x^2) - \cancel{30}x}{5x^2}$$

$$= \frac{2x^2 + o(x^2)}{5x^2} \text{ per } x \rightarrow 0.$$

Risulta allora $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4e^{5x} + \log(1+10x) - 4\cos x - 30x}{5x^2} = \frac{2}{5}.$ *

5) $y' = -(\cos x)y + e^{-\sin x}$ è un'eq. diff. lineare del 1° ordine a coeff. variabili.

Poiché $A(x) = -\sin x$ è una primitiva di $a(x) = -\cos x$, la soluzione generale dell'eq. diff. data è $y(x) = e^{-\sin x} \left(c + \int_0^x e^{\sin t} e^{\sin t} dt \right) = e^{-\sin x} (c + x)$, al variare di $c \in \mathbb{R}$.

Imponendo $y(0) = \frac{\pi}{2}$, si ha $\frac{\pi}{2} = e^0 (c + 0)$, ossia $c = \frac{\pi}{2}$. Dunque, la soluzione del prob. di Cauchy dato è $y(x) = e^{-\sin x} \left(\frac{\pi}{2} + x \right)$, $x \in \mathbb{R}$.

6) i) $f(x) = \arctg\left(\frac{|x+2|}{x-1}\right)$

• $\text{dom } f = \mathbb{R} \setminus \{1\} =]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[.$

• simmetrie: nessuna simmetria evidente.

• segno di f : $f(x) = 0 \Leftrightarrow x+2=0$, $f(x) > 0$ se $x > 1$, $f(x) < 0$ se $x < 1$, $x \neq -2$



Oss. che

$$f(x) = \begin{cases} \arctg\left(\frac{x+2}{x-1}\right) & \text{se } x \geq -2, x \neq 1 \\ \arctg\left(\frac{-x-2}{x-1}\right) & \text{se } x < -2 \end{cases}$$

• $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \arctg\left(\frac{-x-2}{x-1}\right) = -\frac{\pi}{4}$

$y = -\frac{\pi}{4}$ asintoto orizzontale per f , per $x \rightarrow -\infty$.

* $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{20e^{5x} + \frac{10}{1+10x} + 4\sin x - 30}{10x} = \frac{0}{0}$ $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{f'}{g'}\right)' = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{100e^{5x} - \frac{100}{(1+10x)^2} + 4\cos x}{10} = \frac{2}{5}$ e usando de L'Hopital si conclude

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \arctan\left(\frac{x+2}{x-1}\right) = -\frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \arctan\left(\frac{x+2}{x-1}\right) = \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan\left(\frac{x+2}{x-1}\right) = \frac{\pi}{4}$$

$y = \frac{\pi}{4}$ asintoto orizzontale per f , per $x \rightarrow +\infty$.

• continuità di f su $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ (componibile, rapporto di funzioni continue).

• $\text{dom } f' = \mathbb{R} \setminus \{1, -2\}$

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{1 + \left(\frac{x+2}{x-1}\right)^2} \cdot \frac{(x-1) - (x+2)}{(x-1)^2} = \frac{-3}{2x^2 + 2x + 5} & \text{se } x > -2, x \neq 1 \\ \frac{1}{1 + \left(\frac{-x-2}{x-1}\right)^2} \cdot \frac{-(x-1) - (-x-2)}{(x-1)^2} = \frac{3}{2x^2 + 2x + 5} & \text{se } x < -2 \end{cases}$$

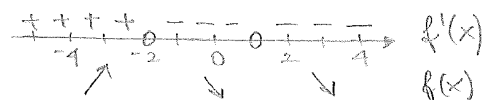
Nono pt. critici per f . Inoltre, essendo f continua in $x = -2$, si ha

$$f'_-(-2) = \lim_{x \rightarrow -2^-} f'(x) = \frac{1}{3}, \quad f'_+(-2) = \lim_{x \rightarrow -2^+} f'(x) = -\frac{1}{3}.$$

Inoltre

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = -\frac{1}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) = -\frac{1}{3}$$



• $\text{dom } f'' = \mathbb{R} \setminus \{1, -2\}$

$$f''(x) = \begin{cases} \frac{+3(4x+2)}{(2x^2+2x+5)^2} & \text{se } x > -2, x \neq 1 \\ \frac{-3(4x+2)}{(2x^2+2x+5)^2} & \text{se } x < -2 \end{cases}$$

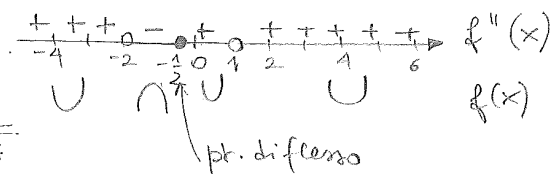
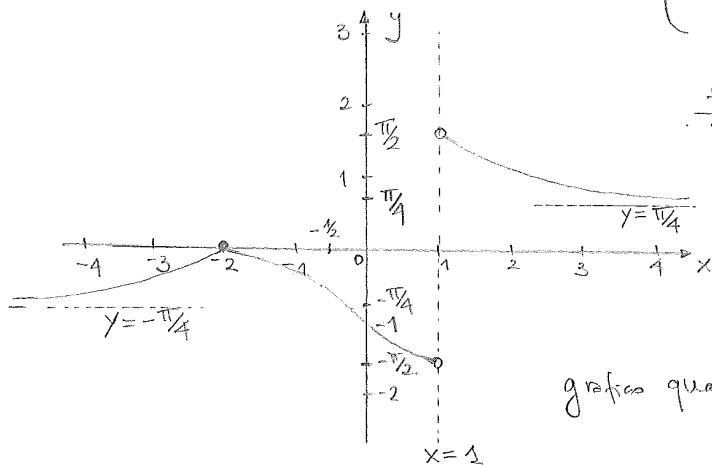


grafico qualitativo di f .



ii) $f(x) = k$ ha esattamente due soluzioni se e solo se $-\frac{\pi}{4} < k < 0$.



7) Enunciate e provate il teorema di Torricelli - Barrow.

