

Università di Trento - Dip. di Ingegneria e Scienza dell'Informazione
 CdL in Informatica - CdL in Ingegneria Elettronica e delle Telecomunicazioni
 CdL in Ingegneria dell'Informazione e Gestione d'Impresa
 ESAME SCRITTO DI ANALISI MATEMATICA 1
 a.a. 2014-2015 - Trento, 11 giugno 2015

FILA (A)

1) $z^4 + 4z = 0 \Leftrightarrow z(z^3 + 4) = 0 \Leftrightarrow \underline{z=0}$ oppure $z^3 = -4$.

Ora $z^3 = -4 \Leftrightarrow z^3 = 4(\cos \pi + i \sin \pi)$.

Ne segue allora

$$\underline{z_0 = \sqrt[3]{4} \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) = \sqrt[3]{4} \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right)}$$

$$\underline{z_1 = \sqrt[3]{4} (\cos \pi + i \sin \pi) = -\sqrt[3]{4}}$$

$$\underline{z_2 = \sqrt[3]{4} \left(\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3} \right) = \sqrt[3]{4} \left(\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right)}.$$

2) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} \beta \cos x + (\alpha^2 - 2)x & \text{se } x < 0 \\ \alpha \arctan x + (\alpha - \beta) & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$$

f è continua in $x_0 = 0$ se e solo se $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$;

da questo segue $\beta = \alpha - \beta$, ossia $\beta = \frac{\alpha}{2}$.

La funzione è chiaramente derivabile in ogni punto escluso al più il punto di raccordo $x_0 = 0$; con

$$f'(x) = \begin{cases} -\beta \sin x + (\alpha^2 - 2) & \text{se } x < 0 \\ \frac{\alpha}{1+x^2} & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

Sia $\beta = \frac{\alpha}{2}$, con che f è continua in $x_0 = 0$. Per studiare la derivabilità in $x_0 = 0$ calcoliamo il limite, per $x \rightarrow 0$, di $f'(x)$.

Per un corollario del teorema di de L'Hopital, se tale limite esiste ed è uguale a $l \in \mathbb{R}$, allora f è derivabile in 0 e $f'(0) = l$. Poiché

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \alpha^2 - 2, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \alpha,$$

vediamo che f è derivabile in $x_0 = 0$ se e solo se $\alpha^2 - 2 = \alpha$,

ossia $\alpha^2 - \alpha - 2 = 0$, ossia $\alpha_1 = -1$, $\alpha_2 = 2$. In conclusione, f è

continua e derivabile in $x_0 = 0$ se e solo se $\underline{(\alpha, \beta) = (-1, -\frac{1}{2})}$ o $\underline{(\alpha, \beta) = (2, 1)}$.

3) i) $f(x) = (\sin x) \log(1+2x)$

Ricordiamo che $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)$ per $x \rightarrow 0$

$\log(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + \frac{t^5}{5} + o(t^5)$ per $t \rightarrow 0$

e quindi

$\log(1+2x) = 2x - \frac{4x^2}{2} + \frac{8x^3}{3} - \frac{16x^4}{4} + \frac{32x^5}{5} + o(x^5)$ per $x \rightarrow 0$

Segue allora

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right) \left(2x - 2x^2 + \frac{8x^3}{3} - 4x^4 + o(x^4)\right) \text{ per } x \rightarrow 0 \\ &= 2x^2 - 2x^3 + \frac{8}{3}x^4 - 4x^5 - \frac{1}{3}x^4 + \frac{1}{3}x^5 + o(x^5) \text{ per } x \rightarrow 0 \\ &= \underline{2x^2 - 2x^3 + \frac{7}{3}x^4 - \frac{11}{3}x^5 + o(x^5)} \text{ per } x \rightarrow 0, \end{aligned}$$

che è quanto ricercato. □

ii) $\frac{f(x) - 2x^2}{x^k} = \frac{-2x^3 + \frac{7}{3}x^4 - \frac{11}{3}x^5 + o(x^5)}{x^k} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} \begin{cases} 0 & \text{se } k=1, 2 \\ -2 & \text{se } k=3 \\ -\infty & \text{se } k=4 \end{cases}$ ■

4) $f(x) = |x| e^{\frac{1}{4}(4|x|-x^2)}$

$= \begin{cases} -x e^{-\frac{5}{4}x^2} & \text{se } x < 0 \\ x e^{\frac{3}{4}x^2} & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$

i) • $\text{dom } f = \mathbb{R}$

• nessuna simmetria evidente

• segno 

• $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x}{e^{\frac{5}{4}x^2}} = 0$

$y=0$ asintoto orizzontale
per f , per $x \rightarrow -\infty$.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{\frac{3}{4}x^2} = +\infty$

non ha più asintoto obliquo, per $x \rightarrow +\infty$
poiché cresce più rapidamente di x !

• continuità di f su tutto $\mathbb{R}$ essendo prodotto, composizione di funzioni continue su $\mathbb{R}$.

• $\text{dom } f' = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

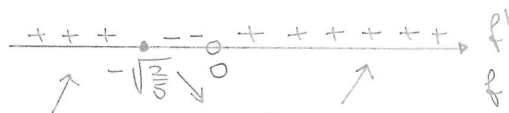
$$\begin{aligned} f'(x) &= \begin{cases} -e^{-\frac{5}{4}x^2} + \frac{5}{2}x^2 e^{-\frac{5}{4}x^2} & \text{se } x < 0 \\ e^{\frac{3}{4}x^2} + \frac{3}{2}x^2 e^{\frac{3}{4}x^2} & \text{se } x > 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} e^{-\frac{5}{4}x^2} \left(-1 + \frac{5}{2}x^2\right) & \text{se } x < 0 \\ e^{\frac{3}{4}x^2} \left(1 + \frac{3}{2}x^2\right) & \text{se } x > 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Poiché f è continua in $x=0$ si ha $f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = -1$
 $f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = 1$;

ne segue che $x=0$ è un pt. angoloso per f .

Osserviamo che $f'(x)=0 \Leftrightarrow -1 + \frac{5}{2}x^2 = 0$ con $x < 0$,

ovvia $x = -\sqrt{\frac{2}{5}}$ è l'unico pt. critico per f . Inoltre $f(-\sqrt{\frac{2}{5}}) = \sqrt{\frac{2}{5}} e^{-\frac{1}{2}}$



Dalla monotonia di f risulta che $x = -\sqrt{\frac{2}{5}}$ è un pt. di massimo loc.

sketch per f .

• $\text{dom } f'' = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

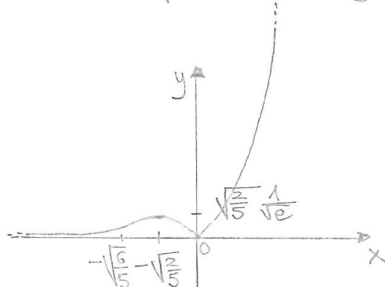
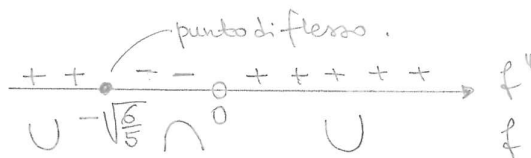


grafico qualitativo di f

$$f''(x) = \begin{cases} +\frac{5}{2}x e^{-\frac{5}{4}x^2} + 5x e^{-\frac{5}{4}x^2} - \frac{25}{4}x^3 e^{-\frac{5}{4}x^2} & \text{se } x < 0 \\ \frac{3}{2}x e^{\frac{3}{4}x^2} + 3x e^{\frac{3}{4}x^2} + \frac{9}{4}x^3 e^{\frac{3}{4}x^2} & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{5}{2}x(3 - \frac{5}{2}x^2) e^{-\frac{5}{4}x^2} & \text{se } x < 0 \\ \frac{9}{2}x(1 + \frac{1}{2}x^2) e^{\frac{3}{4}x^2} & \text{se } x > 0. \end{cases}$$



$$\text{ii) } \text{area}(A) = \int_{-1}^0 f(x) dx = \int_{-1}^0 -x e^{-\frac{5}{4}x^2} dx = \frac{2}{5} \int_{-1}^0 \left(-\frac{5}{2}x\right) e^{-\frac{5}{4}x^2} dx$$

$$= \frac{2}{5} \left[e^{-\frac{5}{4}x^2} \right]_{-1}^0 = \frac{2}{5} (1 - e^{-\frac{5}{4}}).$$

iii) $x = -\sqrt{\frac{6}{5}}$ è l'unico punto di flesso per f ; $E =]-\infty, -\sqrt{\frac{2}{5}}]$
 è il più grande intervallo contenente $x = -\sqrt{\frac{6}{5}}$ e tale che $f|_E$
 risulti invertiva.

5) i) Fissato $M > 0$ calcoliamo $\int_0^M \frac{1}{x^2 + 4x + 6} dx$. Abbiamo

$$\int_0^M \frac{1}{x^2 + 4x + 6} dx = \int_0^M \frac{1}{(x+2)^2 + 2} dx = \frac{1}{2} \int_0^M \frac{1}{\left(\frac{x+2}{\sqrt{2}}\right)^2 + 1} dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^M \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{1 + \left(\frac{x+2}{\sqrt{2}}\right)^2} dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\arctan\left(\frac{x+2}{\sqrt{2}}\right) \right]_0^M =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\arctan\left(\frac{M+2}{\sqrt{2}}\right) - \arctan(\sqrt{2}) \right].$$

Poiché $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+4x+6} dx = \lim_{M \rightarrow +\infty} \int_0^M \frac{1}{x^2+4x+6} dx$, si ha

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+4x+6} dx = \lim_{M \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\arctan\left(\frac{M+2}{\sqrt{2}}\right) - \arctan(\sqrt{2}) \right] =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan(\sqrt{2}) \right),$$

verificando con la convergenza dell'integrale improprio ed individuando con-
temporaneamente il suo valore. $\square$

ii) Osserviamo che $\log(x+e) \geq \log e = 1 \quad \forall x \geq 0$, e quindi

$$0 < \frac{1}{x^2+4x+6\log(x+e)} \leq \frac{1}{x^2+4x+6} \quad \forall x \geq 0.$$

Per il criterio del confronto e per quanto provato in i) si può
concludere che l'integrale improprio $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+4x+6\log(x+e)} dx$ è
anch'esso convergente. $\blacksquare$

6) i) $f: [1,2] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione. f si dice strettamente decrescente
in $[1,2]$ se $\forall x_1, x_2 \in [1,2], (x_1 < x_2) \Rightarrow (f(x_1) > f(x_2))$. $\square$

ii) Enunciate e provate il criterio della radice n -esima per
serie a termini positivi. $\blacksquare$

FLA (B)

$$1) z^4 - 2z = 0 \iff z(z^3 - 2) = 0 \iff \underline{z=0} \text{ oppure } z^3 = 2.$$

$$\text{Ora } z^3 = 2 \iff z^3 = 2(\cos 0 + i \sin 0).$$

$$\text{Ne segue allora } z_0 = \sqrt[3]{2} \left(\cos \frac{0}{3} + i \sin \frac{0}{3} \right) = \sqrt[3]{2}$$

$$z_1 = \sqrt[3]{2} \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right) = \sqrt[3]{2} \left(-\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

$$z_2 = \sqrt[3]{2} \left(\cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} \right) = \sqrt[3]{2} \left(-\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right).$$

$$2) f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{1+x^2} + (\beta^2 - 4)x & \text{se } x < 0 \\ 3\beta \log(1+x) + (\beta - \alpha) & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$$

f è continua in $x_0 = 0$ se e solo se $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$;

da questo segue $\alpha = \beta - \alpha$, ossia $\beta = 2\alpha$.

La funzione è chiaramente derivabile in ogni punto escluso al più il punto di ricordo $x_0 = 0$, con

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{-2\alpha x}{(1+x^2)^2} + (\beta^2 - 4) & \text{se } x < 0 \\ \frac{3\beta}{1+x} & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

Sia $\beta = 2\alpha$, con cui f è continua in $x_0 = 0$. Per studiare la derivabilità in $x_0 = 0$ calcoliamo il limite, per $x \rightarrow 0$, di $f'(x)$.

Per un corollario del teorema di de l'Hopital, se tale limite esiste ed è uguale a $l \in \mathbb{R}$, allora f è derivabile in 0 e $f'(0) = l$. Poiché

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \beta^2 - 4, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = 3\beta,$$

vedremo che f è derivabile in $x_0 = 0 \iff \beta^2 - 4 = 3\beta$, ossia

$\beta^2 - 3\beta - 4 = 0$, ossia $\beta_1 = -1$, $\beta_2 = 4$. In conclusione, f è continua e derivabile in $x_0 = 0$ se e solo se $(\alpha, \beta) = (-\frac{1}{2}, -1)$ o $(\alpha, \beta) = (2, 4)$.

3) i) $f(x) = (1 - e^{3x}) \sin x$

Ricordiamo che $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)$ per $x \rightarrow 0$

$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} + o(t^4)$ per $t \rightarrow 0$

e quindi

$e^{3x} = 1 + 3x + \frac{9x^2}{2} + \frac{27x^3}{2} + \frac{81x^4}{4 \cdot 3!} + o(x^4)$ per $x \rightarrow 0$

Segue allora

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(-3x - \frac{9}{2}x^2 - \frac{9}{2}x^3 - \frac{27}{2}x^4 + o(x^4)\right) \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) \quad \text{per } x \rightarrow 0 \\ &= -3x^2 + \frac{3}{2}x^4 - \frac{9}{2}x^3 + \frac{9}{12}x^5 - \frac{9}{2}x^4 - \frac{27}{8}x^5 + o(x^5) \quad \text{per } x \rightarrow 0 \\ &= \underline{\underline{-3x^2 - \frac{9}{2}x^3 - 4x^4 - \frac{21}{8}x^5 + o(x^5)}} \quad \text{per } x \rightarrow 0, \end{aligned}$$

che è quanto ricercato. □

ii) $\frac{f(x) + 3x^2}{x^k} = \frac{-\frac{9}{2}x^3 - 4x^4 - \frac{21}{8}x^5 + o(x^5)}{x^k} \xrightarrow{x \rightarrow 0^-} \begin{cases} 0 & \text{se } k=1,2 \\ -\frac{9}{2} & \text{se } k=3 \\ +\infty & \text{se } k=4. \end{cases}$



4) $f(x) = |x| e^{-\frac{1}{6}x^2 + x|x|}$

$$= \begin{cases} -x e^{-\frac{7}{6}x^2} & \text{se } x < 0 \\ x e^{\frac{5}{6}x^2} & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$$

i) • $\text{dom } f = \mathbb{R}$

• nessuna simmetria evidente

• segno f

• $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x}{e^{\frac{7}{6}x^2}} = 0$

$y=0$ asintoto orizzontale
per f , per $x \rightarrow -\infty$.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{\frac{5}{6}x^2} = +\infty$

non ha più asintoto obliquo, per $x \rightarrow +\infty$, poiché la funzione cresce più rapidamente di x !

• continuità di f su tutto $\mathbb{R}$ essendo prodotto, composizione di funzioni continue su $\mathbb{R}$.

• $\text{dom } f' = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \begin{cases} -e^{-\frac{7}{6}x^2} + \frac{7}{3}x^2 e^{-\frac{7}{6}x^2} & \text{se } x < 0 \\ e^{\frac{5}{6}x^2} + \frac{5}{3}x^2 e^{\frac{5}{6}x^2} & \text{se } x > 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} e^{-\frac{7}{6}x^2} \left(-1 + \frac{7}{3}x^2\right) & \text{se } x < 0 \\ e^{\frac{5}{6}x^2} \left(1 + \frac{5}{3}x^2\right) & \text{se } x > 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Poiché f è continua in $x=0$ si ha $f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = -1$

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = 1;$$

ne segue che $x=0$ è un pt. angoloso per f .

Osserviamo che $f'(x) = 0 \Leftrightarrow -1 + \frac{7}{3}x^2 = 0$ con $x < 0$, ossia

$$x = -\sqrt{\frac{3}{7}} \text{ è l'unico pt. critico per } f, \text{ inoltre } f\left(-\sqrt{\frac{3}{7}}\right) = \sqrt{\frac{3}{7}} e^{-\frac{1}{6} \cdot \frac{3}{7}} = \sqrt{\frac{3}{7}} e^{-\frac{1}{14}}.$$



Dalla monotonia di f segue che $x = -\sqrt{\frac{3}{7}}$ è un pt. di massimo loco, stretto per f .

• $\text{dom } f'' = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$f''(x) = \begin{cases} \frac{7}{3}x e^{-\frac{7}{6}x^2} + \frac{14}{3}x e^{-\frac{7}{6}x^2} - \frac{49}{9}x^3 e^{-\frac{7}{6}x^2} & \text{se } x < 0 \\ \frac{5}{3}x e^{\frac{5}{6}x^2} + \frac{10}{3}x e^{\frac{5}{6}x^2} + \frac{25}{9}x^3 e^{\frac{5}{6}x^2} & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{7}{3}x \left(3 - \frac{7}{3}x^2\right) e^{-\frac{7}{6}x^2} & \text{se } x < 0 \\ \frac{5}{3}x \left(3 + \frac{5}{3}x^2\right) e^{\frac{5}{6}x^2} & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

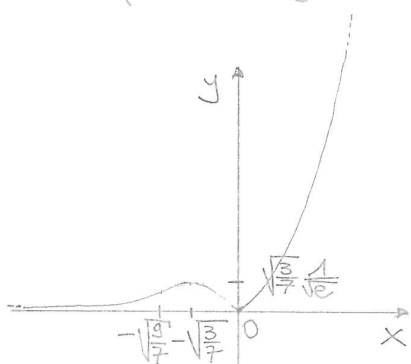
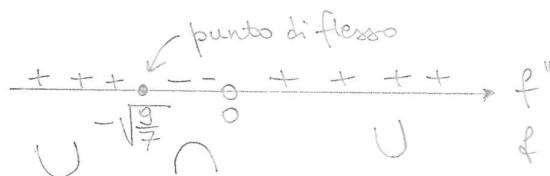


grafico qualitativo di f



ii) $\text{area}(A) = \int_{-1}^0 f(x) dx = \int_{-1}^0 -x e^{-\frac{7}{6}x^2} dx = \frac{3}{7} \int_{-1}^0 \left(-\frac{7}{3}x\right) e^{-\frac{7}{6}x^2} dx$

$$= \frac{3}{7} \left[e^{-\frac{7}{6}x^2} \right]_{-1}^0 = \frac{3}{7} \left(1 - e^{-\frac{7}{6}} \right).$$

iii) $x = -\sqrt{\frac{9}{7}} = -\frac{3}{\sqrt{7}}$ è l'unico pt. di flesso per f ; $E =]-\infty, -\sqrt{\frac{3}{7}}]$ è il più grande intervallo contenente $x = -\sqrt{\frac{9}{7}}$ e tale che $f|_E$ risulti iniettiva.

5)i) Fissato $M > 0$, calcoliamo $\int_0^M \frac{1}{x^2 + 2x + 5} dx$. Abbiamo

$$\begin{aligned} \int_0^M \frac{1}{x^2+2x+5} dx &= \int_0^M \frac{1}{(x+1)^2+4} dx = \frac{1}{4} \int_0^M \frac{1}{\left(\frac{x+1}{2}\right)^2+1} dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^M \frac{\frac{1}{2}}{1+\left(\frac{x+1}{2}\right)^2} dx = \frac{1}{2} \left[\arctan\left(\frac{x+1}{2}\right) \right]_0^M = \\ &= \frac{1}{2} \left[\arctan\left(\frac{M+1}{2}\right) - \arctan\frac{1}{2} \right]. \end{aligned}$$

Poiché $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+2x+5} dx = \lim_{M \rightarrow +\infty} \int_0^M \frac{1}{x^2+2x+5} dx$, si ha

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+2x+5} dx &= \lim_{M \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \left[\arctan\left(\frac{M+1}{2}\right) - \arctan\frac{1}{2} \right] = \\ &= \underline{\underline{\frac{1}{2} \left[\frac{\pi}{2} - \arctan\frac{1}{2} \right]}}, \end{aligned}$$

verificando così la convergenza dell'integrale improprio ed individuando contemporaneamente il suo valore. $\square$

ii) Osserviamo che $\log_3(x+3) \geq \log_3 3 = 1 \quad \forall x \geq 0$, e quindi

$$0 < \frac{1}{x^2+2x+5 \log_3(x+3)} \leq \frac{1}{x^2+2x+5} \quad \forall x \geq 0.$$

Per il criterio del confronto e per quanto provato in i) si può concludere che l'integrale improprio $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+2x+5 \log_3(x+3)} dx$ è anch'esso convergente. $\blacksquare$

6) i) $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$, una funzione. f si dice strett. crescente su $[0,1]$ se $\forall x_1, x_2 \in [0,1], (x_1 < x_2) \Rightarrow (f(x_1) < f(x_2))$. $\square$

ii) Enunciate e provate il criterio del confronto asintotico per serie a termini positivi. $\blacksquare$