

Università di Trento - Dip. di Ingegneria e Scienza dell'Informazione
 CdL in Informatica - CdL in Ingegneria Elettronica e delle Telecomunicazioni
 CdL in Ingegneria dell'Informazione e Gestione d'Impresa
 ESADE SCRITTO DI ANALISI MATEMATICA 1
 a.a. 2014-2015 - Trento, 2 luglio 2015

FILA (A)

1) $A = \{x \in \mathbb{R} : |x+x^2| < x^2\}$. Notiamo che $|x+x^2| < x^2 \Leftrightarrow$
 $-x^2 < x+x^2 < x^2 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2+x > 0 \\ x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -\frac{1}{2} \text{ o } x > 0 \\ x < 0 \end{cases}$

Quindi $A =]-\infty, -\frac{1}{2}[$. Abbiamo immediatamente $\sup A = -\frac{1}{2}$,
 che non è massimo, e $\inf A = -\infty$, che non è minimo.

A è limitato solo superiormente, ma non limitato inferiormente; quindi
 A non è limitato.

2) $f(x) = (x^2+1)e^{-x+1}$

a) Notiamo che $f'(x) = 2xe^{-x+1} - (x^2+1)e^{-x+1}$

$$\begin{aligned} f''(x) &= 2e^{-x+1} - 2xe^{-x+1} - 2xe^{-x+1} + (x^2+1)e^{-x+1} \\ &= 2e^{-x+1} - 4xe^{-x+1} + (x^2+1)e^{-x+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'''(x) &= -2e^{-x+1} - 4e^{-x+1} + 4xe^{-x+1} + 2xe^{-x+1} - (x^2+1)e^{-x+1} \\ &= -6e^{-x+1} + 6xe^{-x+1} - (x^2+1)e^{-x+1} \end{aligned}$$

Segue che $f(1)=2$, $f'(1)=0$, $f''(1)=0$, $f'''(1)=-2$, e quindi
 il polinomio di Taylor d'ordine 3 centrato in $x_0=1$ della f si scrive

$$P_3(1) = \sum_{n=0}^3 \frac{f^{(n)}(1)}{n!} (x-1)^n = 2 - \frac{2}{3!} (x-1)^3 = \underline{\underline{2 - \frac{1}{3}(x-1)^3}}.$$

NOTA: A tale risultato si giunge anche rapidamente considerando il

cambiamento di variabili $y = -x+1$. Allora $x = 1-y$ e

$$\begin{aligned} (x^2+1)e^{-x+1} &\stackrel{\substack{\uparrow \\ y=-x+1}}{=} ((1-y)^2+1)e^y \stackrel{\substack{\uparrow \\ \text{si sfrutta lo sviluppo noto di } e^y, \text{ per } y \rightarrow 0}}{=} (2-2y+y^2)(1+y+\frac{y^2}{2}+\frac{y^3}{6}+o(y^3)) \\ &= 2 + 2y + y^2 + \frac{y^3}{3} - 2y - 2y^2 - y^3 + y^2 + y^3 + o(y^3) \\ &= 2 + \frac{1}{3}y^3 + o(y^3) \stackrel{\substack{\uparrow \\ y=-x+1}}{=} 2 - \frac{1}{3}(x-1)^3 + o(x-1)^3. \end{aligned}$$

□

$$\begin{aligned}
 b) \quad \int f(x) dx &= \int (x^2+1)e^{-x+1} dx = \text{integrando per parti} \\
 &= -(x^2+1)e^{-x+1} + \int 2xe^{-x+1} dx = -(x^2+1)e^{-x+1} - 2xe^{-x+1} + \\
 &+ 2 \int e^{-x+1} dx = -(x^2+1)e^{-x+1} - 2xe^{-x+1} - 2e^{-x+1} + c \quad c \in \mathbb{R} \\
 &= (-x^2-2x-3)e^{-x+1} + c, \quad c \in \mathbb{R}
 \end{aligned}$$

è l'insieme di tutte le primitive della funzione f . Osserviamo che
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} [(-x^2-2x-3)e^{-x+1} + c] = 2 \iff c=2$. Quindi la funzione
 $F(x)$ ricercata è data da $F(x) = \underline{(-x^2-2x-3)e^{-x+1} + 2}$, $x \in \mathbb{R}$.

Notiamo che $f(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$, quindi $\text{area}(E) = \int_0^1 f(x) dx = F(1) - F(0)$
 $= (-1-2-3) - (-3)e = 3e - 6 = \underline{3(e-2)}$. ■

3)i) Abbiamo la serie di potenze $\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2}}_{=a_n} x^n$. Osserviamo che $a_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$,
 $n \geq 1$. Inoltre

$$\sqrt[n]{a_n} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{e};$$

quindi il raggio di convergenza della serie data è $r=e$. □

ii) Notiamo che

$$\begin{aligned}
 \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2} e^n &= e^{n^2 \log(1 - \frac{1}{n})} e^n = \\
 &= e^{n^2 \left(-\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)} e^n = e^{-n - \frac{1}{2} + o(1) + n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \boxed{e^{-1/2}} \neq 0.
 \end{aligned}$$

$\uparrow$
 $\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3), \text{ per } x \rightarrow 0$. □

iii) Possiamo allora concludere che per $x=e$ (e analog, per $x=-e$)

la serie data non è convergente, poiché non è soddisfatta la
 condizione necessaria affinché la serie risulti convergente, cioè la
 condizione che il termine generale di

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2} e^n \quad \left(\text{risp.} \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2} (-1)^n e^n \right)$$

tenda a 0 (vedi ii)). Possiamo allora concludere che l'insieme di
 convergenza della serie data è $E =]-e, e[$. ■

$$4) \boxed{f(x) = \operatorname{arctg}(e^{-x} - e^{-2x})}$$

$$= \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{e^x} - \frac{1}{e^{2x}}\right)$$

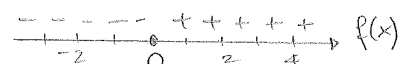
$$= \operatorname{arctg}\left(\frac{e^x - 1}{e^{2x}}\right)$$

i) • $\operatorname{dom} f = \mathbb{R}$,

• nessuna simmetria evidente

• segno: $e^x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow e^x \geq 1$
 $\Leftrightarrow x \geq 0$

$\operatorname{arctg} x$ conserva il segno di x e quindi



• $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{arctg}\left(\frac{e^x - 1}{e^{2x}}\right) = \underline{\underline{-\frac{\pi}{2}}}$;
 (Note: e^x is infinitesimo positivo as $x \rightarrow -\infty$)

$y = -\frac{\pi}{2}$ asintoto orizzontale perf.,
 per $x \rightarrow -\infty$;

• $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{arctg}\left(\frac{e^{-x} - e^{-2x}}{1}\right) = \underline{\underline{0}}$;
 (Note: e^{-x} and e^{-2x} approach 0 as $x \rightarrow +\infty$)

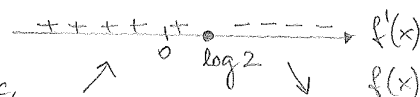
$y = 0$ asintoto orizzontale perf.,
 per $x \rightarrow +\infty$.

• f è continua su tutto $\mathbb{R}$, essendo composizione, differenza ... di funzioni continue su $\mathbb{R}$.

• $\operatorname{dom} f' = \mathbb{R}$ $f'(x) = \frac{1}{1 + (e^{-x} - e^{-2x})^2} (-e^{-x} + 2e^{-2x}) = \frac{1}{1 + (e^{-x} - e^{-2x})^2} \left(\frac{-e^x + 2}{e^{2x}}\right)$.

Quindi $f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x = 2 \Leftrightarrow \underline{\underline{x = \log 2}}$ pt. unico

$f(\log 2) = \operatorname{arctg}\left(\frac{2-1}{4}\right) = \underline{\underline{\operatorname{arctg} \frac{1}{4}}}$



$x = \log 2$ pt. di massimo loc.,
 checked per f

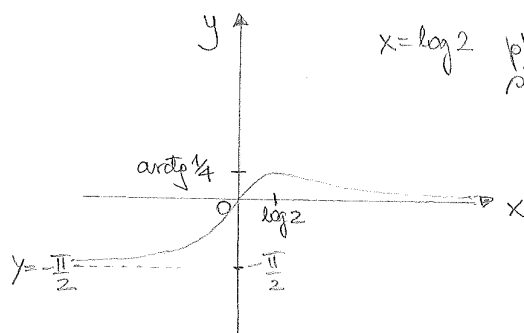


grafico qualitativo di f



ii) Ricordiamo che $e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + o(t^3)$ per $t \rightarrow 0$,
 e quindi

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \text{ per } x \rightarrow 0$$

$$e^{-2x} = 1 - 2x + \frac{(2x)^2}{2} - \frac{(2x)^3}{6} + o(x^3) \text{ per } x \rightarrow 0.$$

Ne segue $e^{-x} - e^{-2x} = x - \frac{3}{2}x^2 + \frac{7}{6}x^3 + o(x^3) \text{ per } x \rightarrow 0.$

D'altra parte, $\arctg t = t + o(t)$ per $t \rightarrow 0$, per cui

$$f(x) = x - \frac{3}{2}x^2 + o(x^2) \text{ per } x \rightarrow 0,$$

e l'ordine di infinitesimo, per $x \rightarrow 0$, di f è $n=1$. ■

5) L'eq. caratteristica dell'eq. diff. omogenea data mi scrive

$$z^2 - 7z + 10 = 0, \text{ da cui } (z-5)(z-2) = 0. \text{ Le soluzioni sono}$$

quindi $z_1 = 5$ e $z_2 = 2$. La soluzione generale (o integrale generale) dell'eq. diff. omogenea $y'' - 7y' + 10y = 0$ è quindi data da

$$y(x) = c_1 e^{5x} + c_2 e^{2x} \text{ al variare di } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Imponiamo allora $y(0) = 0$ e $y'(0) = 3$. Risulta

$$\begin{cases} 0 = c_1 + c_2 \\ 3 = 5c_1 + 2c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = -c_2 \\ 3 = -3c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_2 = -1 \\ c_1 = 1. \end{cases}$$

La soluzione del probl. di Cauchy dato è quindi $y(x) = e^{5x} - e^{2x}, x \in \mathbb{R}$. ■

6) i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall$ intorno U di $-\infty$ esiste un intorno V di $+\infty$

tale che $\forall x \in V \Rightarrow f(x) \in U$;

oppure $\forall K < 0 \exists M > 0$ tale che

$$\forall x > M \Rightarrow f(x) < K. \quad \square$$

ii) Enunciate e provate il teorema di Rolle. □

La funzione $f(x) = |x|$ in $[-1, 1]$ non soddisfa le ipotesi del

teorema di Rolle, poiché f non è derivabile in $x=0 \in]-1, 1[$. ■

FILA (B)

1) $A = \{x \in \mathbb{R} : |1 + \frac{1}{x}| \leq 1\}$. Notiamo che $|1 + \frac{1}{x}| \leq 1 \Leftrightarrow$

$$-1 \leq 1 + \frac{1}{x} \leq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x} \geq -2 \\ x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \leq -\frac{1}{2}$$

Quindi $A =]-\infty, -\frac{1}{2}]$. Si ha immediatamente $\sup A = \max A = -\frac{1}{2}$, mentre $\inf A = -\infty$, che non è minimo.

A è limitato solo superiormente, ma non limitato inferiormente; quindi A non è limitato. ▣

2) $f(x) = (x^2 - 1)e^{-x+1}$

a) Notiamo che $f'(x) = 2xe^{-x+1} - (x^2 - 1)e^{-x+1}$

$$\begin{aligned} f''(x) &= 2e^{-x+1} - 2xe^{-x+1} - 2xe^{-x+1} + (x^2 - 1)e^{-x+1} \\ &= 2e^{-x+1} - 4xe^{-x+1} + (x^2 - 1)e^{-x+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'''(x) &= -2e^{-x+1} - 4e^{-x+1} + 4xe^{-x+1} + 2xe^{-x+1} - (x^2 - 1)e^{-x+1} \\ &= -6e^{-x+1} + 6xe^{-x+1} - (x^2 - 1)e^{-x+1} \end{aligned}$$

Segue che $f(1) = 0$, $f'(1) = 2$, $f''(1) = -2$, $f'''(x) = 0$, e quindi

il polinomio di Taylor di ordine 3 centrato in $x_0 = 1$ della f si scrive

$$P_3(1) = \sum_{n=0}^3 \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n = 2(x-1) - \frac{2}{2}(x-1)^2 = \underline{\underline{2(x-1) - (x-1)^2}}.$$

Nota: A tale risultato si giunge anche rapidamente considerando il

cambiamento di variabili $y = -x+1$. Allora $x = 1-y$ e

$$\begin{aligned} (x^2 - 1)e^{-x+1} &= \underset{y = -x+1}{\uparrow} ((1-y)^2 - 1) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{sviluppo noto di } e^y, \text{ per } y \rightarrow 0}}{e^y} = (-2y + y^2)(1 + y + \frac{y^2}{2} + o(y^2)) \\ &= -2y - 2y^2 - \cancel{y^3} + y^2 + \cancel{y^3} + o(y^3) \quad \text{per } y \rightarrow 0 \\ &= -2y - y^2 + o(y^3) \underset{y = -x+1}{\uparrow} = 2(x-1) - (x-1)^2 + o((x-1)^3). \end{aligned}$$

▣

b) $\int f(x) dx = \int (x^2 - 1)e^{-x+1} dx =$ integrando per parti

$$\begin{aligned} &= -(x^2 - 1)e^{-x+1} + \int 2xe^{-x+1} dx = -(x^2 - 1)e^{-x+1} - 2xe^{-x+1} \\ &\quad + \int 2e^{-x+1} dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= -(x^2-1)e^{-x+1} - 2xe^{-x+1} + 2 \int e^{-x+1} dx \\
 &= -(x^2-1)e^{-x+1} - 2xe^{-x+1} - 2e^{-x+1} + c, \quad c \in \mathbb{R} \\
 &= (-x^2-2x-1)e^{-x+1} + c, \quad c \in \mathbb{R}
 \end{aligned}$$

è l'insieme di tutte le primitive della funzione f . Osserviamo che
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} [(-x^2-2x-1)e^{-x+1} + c] = -1 \Leftrightarrow c = -1$. Quindi la
 funzione $F(x)$ ricercata è data da $F(x) = \underline{(-x^2-2x-1)e^{-x+1} - 1}$, $x \in \mathbb{R}$.

Notiamo che $f(x) > 0 \quad \forall x \in [2, 3]$, quindi

$$\begin{aligned}
 \text{area}(E) &= \int_2^3 f(x) dx = F(3) - F(2) = (-9-6-1)e^{-2} - (-4-4-1)e^{-1} \\
 &= \underline{-16e^{-2} + 9e^{-1}}.
 \end{aligned}$$

3) i) Abbiamo la serie di potenze $\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\left(1 - \frac{2}{n}\right)^{n^2}}_{=a_n} x^n$. Osserviamo che
 $a_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Inoltre

$$\sqrt[n]{a_n} = \left(1 - \frac{2}{n}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^2};$$

quindi il raggio di convergenza della serie data è $\underline{r = e^2}$. □

ii) Notiamo che

$$\begin{aligned}
 \left(1 - \frac{2}{n}\right)^{n^2} e^{2n} &= e^{n^2 \log\left(1 - \frac{2}{n}\right)} e^{2n} = \\
 &= e^{n^2 \left(-\frac{2}{n} - \frac{2}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)} e^{2n} = e^{-2n - 2 + o(1)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \boxed{e^{-2}} \neq 0.
 \end{aligned}$$

$\uparrow$
 $\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3), \text{ per } x \rightarrow 0.$

□

iii) Possiamo allora concludere che per $x = e$ (e analog. per $x = -e$)
 la serie data non è convergente, poiché non è soddisfatta la
 condizione necessaria affinché la serie risulti convergente,
 cioè la condizione che il termine generale di

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{2}{n}\right)^{n^2} e^{2n} \quad \left(\text{risp.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{2}{n}\right)^{n^2} (-1)^n e^{2n}\right)$$

tenda a 0 (vedi ii)). Possiamo allora concludere che l'insieme di con-
 vergenza della serie data è $\underline{E =]-e^2, e^2[}$. ■

$$4) \boxed{f(x) = \operatorname{arctg}(e^{-3x} - e^{-x})}$$

$$= \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{e^{3x}} - \frac{1}{e^x}\right)$$

$$= \operatorname{arctg}\left(\frac{1 - e^{2x}}{e^{3x}}\right)$$

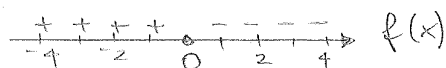
i) • $\operatorname{dom} f = \mathbb{R}$

• nessuna simmetria evidente

• segno: $1 - e^{2x} \geq 0 \Leftrightarrow e^{2x} \leq 1$
 $\Leftrightarrow x \leq 0$

$\operatorname{arctg} x$ conserva il segno di x e quindi

• $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{arctg}\left(\frac{1 - e^{2x}}{e^{3x}}\right) = \frac{\pi}{2}$



$y = \frac{\pi}{2}$ asintoto orizzontale per f ,
 per $x \rightarrow -\infty$;

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \operatorname{arctg}(e^{-3x} - e^{-x}) = 0$

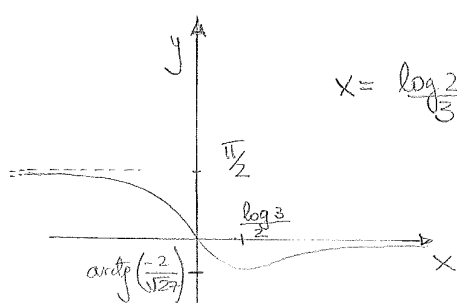
$y = 0$ asintoto orizzontale per f ,
 per $x \rightarrow +\infty$.

• f è continua in tutto $\mathbb{R}$, essendo composizione, differenza... di funzioni continue in $\mathbb{R}$.

• $\operatorname{dom} f' = \mathbb{R}$ $f'(x) = \frac{1}{1 + (e^{-3x} - e^{-x})^2} (-3e^{-3x} + e^{-x}) = \frac{1}{1 + (e^{-3x} - e^{-x})^2} \left(\frac{-3 + e^{2x}}{e^{3x}}\right)$

Quindi $f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^{2x} = 3 \Leftrightarrow x = \frac{\log 3}{2}$ pt. critico

$f\left(\frac{\log 3}{2}\right) = \operatorname{arctg}\left(\frac{1 - 3}{\sqrt{27}}\right) = \operatorname{arctg}\left(\frac{-2}{\sqrt{27}}\right)$



$x = \frac{\log 3}{2}$ pt. di minimo lc.
 sbatto per f

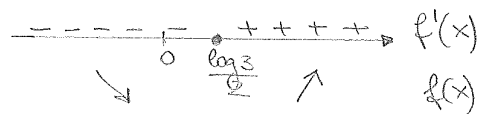


grafico qualitativo di f



ii) Ricordiamo che $e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + o(t^3)$ per $t \rightarrow 0$,

e quindi $e^{-3x} = 1 - 3x + \frac{9x^2}{2} - \frac{27x^3}{6} + o(x^3)$ per $x \rightarrow 0$

$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$ per $x \rightarrow 0$.

Ne segue $e^{-3x} - e^{-x} = -2x + 4x^2 - \frac{26}{3}x^3 + o(x^3)$ per $x \rightarrow 0$

D'altra parte, $\arctan t = t + o(t)$ per $t \rightarrow 0$, per cui

$$f(x) = -2x + 4x^2 + o(x^2) \quad \text{per } x \rightarrow 0,$$

e l'ordine di infinitesimo, per $x \rightarrow 0$, di f è $n=1$. ■

5) L'eq. caratteristica dell'eq. diff. omogenea data si scrive $z^2 + z = 0$, da cui $z_1 = 0$, $z_2 = -1$. La soluzione generale (o integrale generale) dell'eq. diff. omogenea $y'' + y' = 0$ è quindi data da

$$y(x) = c_1 + c_2 e^{-x} \quad \text{al variare di } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Imponiamo allora $y(0) = 0$ e $y'(0) = -1$. Risulta

$$\begin{cases} 0 = c_1 + c_2 \\ -1 = -c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_2 = 1 \\ c_1 = -1 \end{cases}.$$

La soluzione del probl. di Cauchy dato è quindi $y(x) = -1 + e^{-x}$, $x \in \mathbb{R}$. ■

6) i) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall$ intorno U di $+\infty$ esiste un intorno V di $-\infty$ ■

talche $\forall x \in V \Rightarrow f(x) \in U$;

oppure $\forall M > 0 \exists K < 0$ tale che

$\forall x < K \Rightarrow f(x) > M$. □

ii) Enunciare e provare il teorema di Rolle. □

La funzione $f(x) = -|x| + 1$ in $[-1, 1]$ non soddisfa le ipotesi del teorema di Rolle, poiché f non è derivabile in $x=0 \in]-1, 1[$. ■