

i) $A = \{a_n : a_n = [1 + (-1)^n] \frac{n-1}{n}, n \in \mathbb{N}^+\}$. Osserviamo che

$$a_n = \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ dispari} \\ 2\left(\frac{n-1}{n}\right) = 2 - \frac{2}{n} & \text{se } n \text{ è pari.} \end{cases}$$

Poiché $0 \leq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}^+$, in particolare $0 = a_1$, possiamo affermare che $\inf A = \min A = 0$.

Notiamo che $a_n < 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}^+$. Proviamo che $\sup A = 2$. Poiché

$a_n < 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}^+$, basta provare che $\forall \varepsilon > 0 \exists n \in \mathbb{N}^+ : 2 - \varepsilon < a_n$.

Fissato $\varepsilon > 0$ ad arbitrio, abbiamo $2 - \varepsilon < a_n \Leftrightarrow 2 - \varepsilon < 2 - \frac{2}{n}$ n pari

$\Leftrightarrow \varepsilon > \frac{2}{n}$ con n pari, ma questo segue dalla proprietà archimedeica.

Quindi $\sup A = 2$. Non è un massimo, poiché $a_n < 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}^+$. $\square$

ii) $B = \{x_n : x_n = (\cos n\pi)^2 - \frac{3}{n}, n \in \mathbb{N}^+\}$. Osserviamo che

$$x_n = \begin{cases} 1 - \frac{3}{n} & \text{se } n \text{ è pari} \\ -1 - \frac{3}{n} & \text{se } n \text{ è dispari.} \end{cases}$$

Poiché $-4 = a_1 < a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ segue subito che $\inf B = \min B = -4$.

D'altra parte, essendo $x_n < 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}^+$ e $\frac{3}{n}$ decresce, vogliamo

provare che $\sup B = 1$. Questo si fa completamente analog. a quanto provato in i). Non è un massimo, poiché $1 \notin B$. $\square$

iii) $C = \left\{ \frac{n+n^2}{n-1} : n \in \mathbb{N}, n \geq 2 \right\}$. Osserviamo che $\frac{n+n^2}{n-1} = \frac{n(n+1)}{n-1} \geq \frac{n(n-1)}{n-1} = n$

Quindi si ha facilmente che $\sup C = +\infty$, poiché C non è limitato

superiormente: infatti $\forall M > 0 \exists n \in \mathbb{N} : \frac{n+n^2}{n-1} > M$. Basta osservare

che $\frac{n+n^2}{n-1} > n$ e $n > M$ opportuno segue dalla proprietà archimedeica.

Ovviamente $\inf C = \min C = 6$ (infatti, si ha $b_2 = 6$ e $b_3 = 6$, e

$$b_n = \frac{n+n^2}{n-1} < \frac{n+1+(n+1)^2}{n} = b_{n+1}, \text{ infatti } n^2+n^3 < n^2-1 + (n^2+2n+1)(n-1)$$

$$\Leftrightarrow n^3 < n^3 - n^2 + 2n^2 - 2n + n - 1 - 1$$

$$\Leftrightarrow 0 < n^2 - n - 2 \quad \forall n \geq 3). \quad \blacksquare$$

$$2) i) A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 + x \log_2 8 + \log_{\frac{1}{2}} 16 \leq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x^2 + 3x - 4 \leq 0\} = \underline{[-4, 1]}$$

$$B = \{x \in \mathbb{R} : e^{|x-3|} > e^{-x-1}\} = \{x \in \mathbb{R} : |x-3| > -x-1\} = \underline{\mathbb{R}}$$

$$\text{Or } |x-3| > -x-1 \Leftrightarrow \begin{cases} x-3 \geq 0 \\ x-3 > -x-1 \end{cases} \quad \text{or} \quad \begin{cases} x-3 < 0 \\ -x+3 > -x-1 \end{cases} \text{ sempre vero!}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ 2x > 2 \end{cases} \quad \text{or} \quad \begin{cases} x < 3 \\ \mathbb{R} \end{cases} \quad S = \mathbb{R}$$

$$ii) \underline{\sup A = \max A = 1} ; \quad B \setminus A = \mathbb{R} \setminus [-4, 1] =]-\infty, -4[\cup]1, +\infty[$$

$$\underline{\inf (B \setminus A) = -\infty}$$

$$3) i) A = \{x \in \mathbb{R} : x|x-2| < 3\}$$

$$= \underline{]-\infty, 3[}$$

$$\begin{cases} x-2 \geq 0 \\ x^2 - 2x - 3 < 0 \end{cases} \quad \text{or} \quad \begin{cases} x-2 < 0 \\ x^2 - 2x + 3 > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ -1 < x < 3 \end{cases} \quad \text{or} \quad \begin{cases} x < 2 \\ \mathbb{R} \end{cases}$$

$$B = \{x \in \mathbb{R} : \sqrt{x|x|-2} \leq 1\}$$

$$= \underline{[\sqrt{2}, \sqrt{3}]}$$

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 - 2 \geq 0 \\ x^2 - 2 \leq 1 \end{cases} \quad \text{or} \quad \begin{cases} x < 0 \\ -x^2 - 2 \geq 0 \end{cases} \text{ impossible}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 \geq 2 \\ x^2 \leq 3 \end{cases} \Rightarrow \sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{3}$$

ii) A è limitato superiormente, ma non limitato inferiormente e quindi non è limitato.

B è limitato superiormente e inferiormente; quindi B è limitato. $\square$

$$iii) \underline{A \cup B = A}, \text{ poiché } B \subset A;$$

$$\underline{A \cap B = B}, \text{ poiché } B \subset A;$$

$$\underline{A \setminus B =]-\infty, \sqrt{2}[\cup]\sqrt{3}, 3[}$$

$$iv) \underline{\inf (A \cap B) = \min (A \cap B) = \sqrt{2}} ; \quad \underline{\sup A = 3}$$

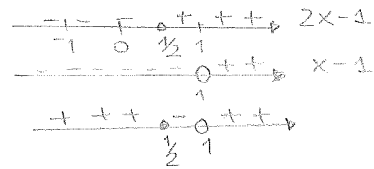
$$4) i) A = \{x \in \mathbb{R} : \left| \frac{x}{x-1} \right| > 1\}$$

$$: \quad \frac{x}{x-1} < -1 \quad \text{or} \quad \frac{x}{x-1} > 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{x+x-1}{x-1} < 0 \quad \text{or} \quad \frac{x-x+1}{x-1} > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x-1}{x-1} < 0 \quad \text{or} \quad \frac{1}{x-1} > 0$$

$$A =]\frac{1}{2}, 1[\cup]1, +\infty[$$



A non è un intervallo essendo unione
di due intervalli disgiunti!

A è limitato inferiormente, ma non superiormente, e quindi non
è limitato. $\square$

$$\text{ii) } B = \{x \in \mathbb{R} : \log_2(3-|x|) < 1\} \quad \begin{cases} 3-|x| > 0 \\ 3-|x| < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x| < 3 \\ |x| > 1 \end{cases}$$

$$=]-3, -1[\cup]1, 3[.$$

B non è un intervallo! B è limitato, essendo inferiormente e superior-
mente limitato. $\square$

$$\text{iii) } \inf A = \frac{1}{2}, \quad \sup B = 3.$$

$$5) \text{ i) } \left\{ \sum_{k=0}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} \quad \forall n \in \mathbb{N} \right\}: \text{ Sia } P(n) = " \sum_{k=0}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} " \quad n \in \mathbb{N}.$$

• Osserviamo che $P(0)$ è vero.

• Proviamo ora che $\forall n \geq 1$, supposto vero $P(n)$, risulta $P(n+1)$ vero.

$$\text{Ora } \sum_{k=0}^{n+1} k^3 = \sum_{k=0}^n k^3 + (n+1)^3 \stackrel{\text{ip. induttivo}}{=} \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 = \frac{n^2(n+1)^2 + 4(n+1)^3}{4} =$$

$$= \frac{(n+1)^2(n^2 + 4(n+1))}{4} = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4},$$

che ci voleva dimostrare.

Possiamo quindi afferire che $P(n)$ è vero $\forall n \in \mathbb{N}$. $\square$

$$\text{ii) } \left\{ 3^n \geq n 2^n \quad \forall n \in \mathbb{N} \right\}: \text{ Sia } P(n) = " 3^n \geq n 2^n " \quad n \in \mathbb{N}.$$

• Osserviamo che $P(0)$ è vero, $P(1)$ è vero, e anche $P(2)$ è vero.

• Proviamo ora che $\forall n \geq 2$, supposto vero $P(n)$, risulta $P(n+1)$ vero.

Ora

$$3^{n+1} = 3^n \cdot 3 \geq \underset{\substack{\uparrow \\ \text{p. induttivo}}}{n \cdot 2^n} \cdot 3 = n \cdot 2^n \cdot (2+1) = n \cdot 2^n \cdot 2 + n \cdot 2^n \\ \geq n \cdot 2^{n+1} + 2 \cdot 2^n = (n+1) 2^{n+1} \quad \forall n \geq 2 \quad \blacksquare$$

6) i) $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ $\boxed{f(x) = x + \frac{1}{x}}$ non è iniettiva!

Infatti, $x_1 = 3 \neq x_2 = \frac{1}{3}$ e mi ha $x_1 + \frac{1}{x_1} = x_2 + \frac{1}{x_2}$.

f è dispari: è definita su un insieme simmetrico (rispetto all'origine); inoltre $f(-x) = -x + \frac{1}{-x} = -\left(x + \frac{1}{x}\right) = -f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

□

ii) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $\boxed{f(x) = 2 + \sin x}$ non è iniettiva!

Infatti, $x_1 = 0 \neq x_2 = \pi$ e si ha $f(x_1) = 2 = f(x_2)$.

f non è dispari!

□

iii) $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ $\boxed{f(x) = x - \frac{1}{x}}$ è iniettiva, poiché f è strett.

crescente su $\mathbb{R}^+$ (x è crescente, e $-\frac{1}{x}$ è crescente su $\mathbb{R}^+$ poiché $\frac{1}{x}$ è decrescente su $\mathbb{R}^+$).

Non ha senso parlare di funzione dispari, poiché $\mathbb{R}^+$ non è simmetrico rispetto all'origine.

□

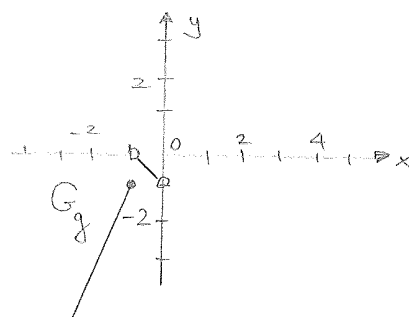
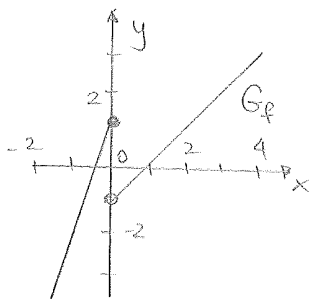
iv) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$: $\boxed{f(x) = x^3 - 2}$ è iniettiva. Infatti, supponiamo che

$$f(x_1) = f(x_2) \quad \text{ossia} \quad x_1^3 - 2 = x_2^3 - 2 \quad \text{ossia} \quad x_1^3 - x_2^3 = 0, \\ \text{ossia} \quad (x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2) = 0. \quad \text{Si ha} \quad x_1 = x_2. \quad \square$$

Non è dispari: infatti $\forall x \in \mathbb{R}$

$$f(-x) = (-x)^3 - 2 = -x^3 - 2 \neq -(x^3 - 2). \quad \blacksquare$$

7) i)



- i) $f(\mathbb{R}) = \text{im} f = \mathbb{R}$ $g(-\infty, 0[) = \text{im} g =]-\infty, 0[$.
 ii) f non è iniettiva, poiché $f(1) = 0 = f(-\frac{1}{3})$.
 f è suriettiva, poiché $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R} = \text{codominio di } f$. $\square$

g è iniettiva: g è strett. crescente su $]-\infty, -1]$ e strett. decrescente su $]-1, 0[$. Inoltre $\text{im} g|_{]-\infty, -1]} \cap \text{im} g|_{]-1, 0[} = \emptyset$.

g non è suriettiva, poiché $g(-\infty, 0[) =]-\infty, 0[\subsetneq \mathbb{R}$. $\square$

- iii), $f \circ g$ è ben definita $\forall x \in \text{dom} g : g(x) \in \text{dom} f$; segue che $f \circ g$ è ben definita $\forall x \in]-\infty, 0[$. Ora $\text{im} g = g(-\infty, 0[) =]-\infty, 0[$ e quindi

$$\boxed{(f \circ g)(x)} = f(g(x)) = \begin{cases} 3(2x+1)+1 & \text{se } x \leq -1 \\ 3(-x-1)+1 & \text{se } -1 < x < 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 6x+4 & \text{se } x \leq -1 \\ -3x-2 & \text{se } -1 < x < 0 \end{cases} \quad \blacksquare$$

- 8) i) $2\sin^2 x - 5\sin x + 2 < 0$: poniamo $\sin x = t$ e si ha

$$2t^2 - 5t + 2 < 0 \Leftrightarrow t_1 \in]\frac{1}{2}, 2[$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} < \sin x < 2$$

$$S = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left] \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \right[\quad k \in \mathbb{Z}$$

- ii) $|\cos x - 1| < \cos x$: osserviamo che $\cos x \leq 1$ e quindi

$$\text{la ns. diseq. è equiv. } 1 - \cos x < \cos x$$

$$\Leftrightarrow \cos x > \frac{1}{2}$$

$$S = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left] -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \frac{\pi}{3} + 2k\pi \right[. \quad \blacksquare$$