

Università di Trento — Dip. di Ingegneria e Scienza dell'Informazione
 CdL in Informatica — CdL in Ingegneria Elettronica e delle Telecomunicazioni
 CdL in Ingegneria dell'Informazione e Gestione d'Impresa

PRIMA PROVA INTERMEDIA DI ANALISI MATEMATICA 1

a.a. 2014/2015 — Trento, 31 ottobre 2014

FILA (A)

1) i) $|z|^2 + z^2 - 2 - 2i = 0$: Poniamo $z = x + iy$ e otteniamo

$$x^2 + y^2 + (x + iy)^2 - 2 - 2i = 0 ;$$

quindi $x^2 + \cancel{y^2} + x^2 + 2xyi - \cancel{y^2} - 2 - 2i = 0 ,$

ossia $2(x^2 - 1) + 2(xy - 1)i = 0 ,$

da cui
$$\begin{cases} x^2 - 1 = 0 \\ xy - 1 = 0 \end{cases}$$

Quindi $z_1 = 1 + i$, $z_2 = -1 - i$ sono le soluzioni dell'eq. data.

La forma trigonometrica di z_1 è $z_1 = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$
 di z_2 è $z_2 = \sqrt{2} \left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} \right)$.

La forma esponenziale di z_1 è $z_1 = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}$
 di z_2 è $z_2 = \sqrt{2} e^{i\frac{5\pi}{4}}$.

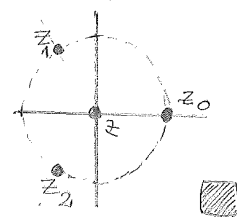
□

ii) $z^4 = 2z \iff z(z^3 - 2) = 0 \iff z = 0 \text{ o } z^3 = 2$.

Ora $z^3 = 2 \iff z_0 = \sqrt[3]{2}$

$$z_1 = \sqrt[3]{2} \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right)$$

$$z_2 = \sqrt[3]{2} \left(\cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} \right).$$



$$2)i) A = \left\{ x_n = \frac{(-1)^n + 2}{n} : n \in \mathbb{N}, n \geq 1 \right\}$$

$$x_n = \begin{cases} \frac{3}{n} & \text{se } n \text{ è pari} \\ \frac{1}{n} & \text{se } n \text{ è dispari.} \end{cases}$$

Si ha $0 < x_n \leq \frac{3}{2} \quad \forall n \geq 1$. Segue subito che $\sup A = \max A = \frac{3}{2}$ (infatti $x_2 = \frac{3}{2} \in A$, e $x_n < \frac{3}{2} \quad \forall n \geq 1, n \neq 2$).

Proviamo che $\inf A = 0$. Abbiamo già osservato che $0 < x_n \quad \forall n \geq 1$.

Basta provare che $\forall \varepsilon > 0 \exists n \geq 1$ t.c. $0 + \varepsilon > x_n$.

Sia allora $\varepsilon > 0$ fissato; per la proprietà archimedeica dei nr. reali

$\exists n \in \mathbb{N} : \varepsilon > \frac{1}{n}$. Quindi $\varepsilon > x_n$.

Per l'arbitrarietà di ε si conclude la dimostrazione. □

ii) Abbiamo già osservato che $\sup A = \max A = \frac{3}{2}$, mentre $\inf A$ non è minimo ($\nexists x_n \in A : x_n = 0$). ■

3) Sia $\mathcal{P}(n) = "n! > 2n^2"$ $n \in \mathbb{N}$. Abbiamo

i) $\mathcal{P}(5) = "5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120 > 2 \cdot 5^2 = 50"$ vero.

ii) Sia $n \geq 5$ e supponiamo $\mathcal{P}(n)$ vero. Dimostriamo che allora $\mathcal{P}(n+1)$ è vero.

$$(n+1)! = (n+1) n! \underset{\substack{\uparrow \\ \text{ipotesi induttiva}}}{>} (n+1) 2n^2.$$

Abbiamo concluso se proviamo che $2(n+1)n^2 \geq 2(n+1)^2$.

$$0 \Leftrightarrow (n+1)n^2 \geq (n+1)^2 \Leftrightarrow n^2 \geq n+1 \Leftrightarrow$$

$$n^2 - n - 1 \geq 0 \quad \text{e questo è vero } \forall n \geq 2 \text{ e}$$

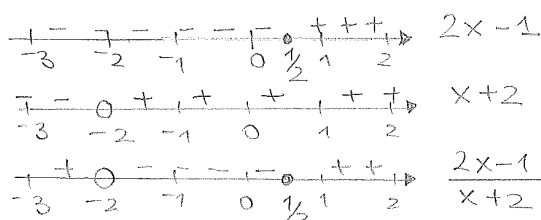
quindi $\forall n \geq 5$.

Per il principio di induzione possiamo affermare che $\mathcal{P}(n)$ è vero $\forall n \geq 5$. ■

4) i) $A = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{|x-3|}{|x+2|} \leq 1 \right\}$

$$\left| \frac{x-3}{x+2} \right| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq \frac{x-3}{x+2} \leq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x-3}{x+2} + 1 \geq 0 \\ \frac{x-3}{x+2} - 1 \leq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2x-1}{x+2} \geq 0 \\ \frac{-5}{x+2} \leq 0 \end{cases}$$



$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in]-\infty, -2[\cup [\frac{1}{2}, +\infty[\\ x \in]-2, +\infty[\end{cases}$$

$$\Rightarrow \underline{A = [\frac{1}{2}, +\infty[}$$

□

ii) $\sup A = +\infty$ $\nexists \max A$

$\inf A = \min A = \frac{1}{2}$

A è un intervallo; A è limitato inferiormente, ma non superiormente.

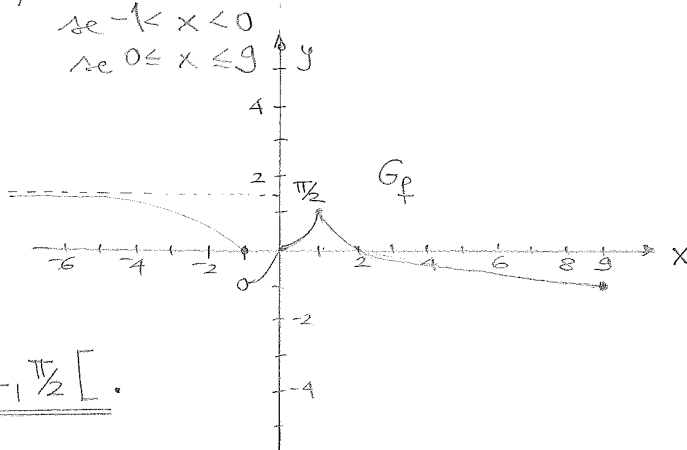
A non è limitato.

■

5) $f:]-\infty, 9] \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} -\arctan(x+1) & \text{se } x \leq -1 \\ x^2 + 2x & \text{se } -1 < x < 0 \\ -|\sqrt{x-1}| + 1 & \text{se } 0 \leq x \leq 9 \end{cases}$$

$$y = x^2 + 2x = (x+1)^2 - 1$$



i) $\text{im} f = f(]-\infty, 9]) = \underline{[-1, \frac{\pi}{2}[}$

$x = 1$ pt. di massimo locale

$f(1) = 1$

$x = 9$ pt. di minimo locale

$f(9) = -1$

□

ii) $f(-1) = 0 \neq \lim_{x \rightarrow -1^+} (x^2 + 2x) = -1$ f non è continua in $x_0 = -1$.

$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x^2 + 2x) = 0 = f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ f è continua in $x_0 = 0$.

■

$$6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^2}{x(e^{2x}-1)} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}.$$

$$\text{Infatti } \frac{\sin x^2}{x(e^{2x}-1)} = \overset{\nearrow x \rightarrow 0}{\frac{\sin x^2}{x^2}} \cdot \overset{\nearrow x \rightarrow 0}{\frac{2x}{e^{2x}-1}} \cdot \frac{1}{2}.$$

7) i) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funzione. f si dice strettamente crescente in $\mathbb{R}$ se
 $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}, [x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)]$.

Un banale esempio di funzione non strett. crescente: $f(x) = 2 \quad \forall x \in \mathbb{R}$. $\square$

ii) Scrivete l'enunciato del teorema di esistenza della radice
 n -esima in $\mathbb{R}$.

"Siano $y \in \mathbb{R}, y \geq 0, n \in \mathbb{N}, n \geq 1$. Allora $\exists! x \in \mathbb{R}, x \geq 0$
 tale che $x^n = y$. ($x = \sqrt[n]{y} = y^{\frac{1}{n}}$ si chiama radice n -esima di y)."

FILA (B)

1) i) $\bar{z}^2 + i(z\bar{z}) - 4i = 0$: Poniamo $z = x + iy$ e otteniamo

$$(x - iy)^2 + i(x^2 + y^2) - 4i = 0 ;$$

quindi

$$x^2 - 2xyi - y^2 + i(x^2 + y^2) - 4i = 0 ,$$

ossia

$$(x^2 - y^2) + i(x^2 + y^2 - 2xy - 4) = 0 ,$$

da cui

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 0 \\ x^2 + y^2 - 2xy - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x^2 = y^2 \Leftrightarrow \begin{matrix} x = y \\ x = -y \end{matrix}$$

Quindi

$$\begin{cases} x = y \\ x^2 + y^2 - 2xy - 4 = 0 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} x = -y \\ x^2 + y^2 - 2xy - 4 = 0 \end{cases} ;$$

si ha

$$\begin{cases} x = y \\ 2x^2 - 2x^2 - 4 = 0 \text{ impossibile} \end{cases} \quad \begin{cases} x = -y \\ 2x^2 + 2x^2 - 4 = 0 \end{cases} ,$$

ossia

$$\begin{cases} x = -y \\ x = \pm 1 \end{cases}$$

Quindi $z_1 = 1 - i$, $z_2 = -1 + i$ sono le soluzioni dell'eq. data.

La forma trigonometrica di z_1 è $z_1 = \sqrt{2} \left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \right)$

di z_2 è $z_2 = \sqrt{2} \left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) \right)$.

La forma esponenziale di z_1 è $z_1 = \sqrt{2} e^{-\frac{\pi}{4}i}$

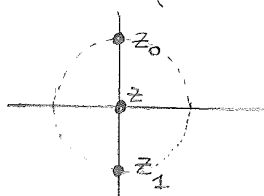
di z_2 è $z_2 = \sqrt{2} e^{\frac{3\pi}{4}i}$.

□

ii) $z^3 = -2z \Leftrightarrow z(z^2 + 2) = 0 \Leftrightarrow z = 0 \vee z^2 = -2$.

Ora $z^2 = -2 = 2(\cos \pi + i \sin \pi)$ e quindi $z_0 = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right)$

$z_1 = \sqrt{2} \left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} \right)$.



■

2)i) $A = \{x_n = \frac{n-1}{5n} : n \in \mathbb{N}, n \geq 1\}$

$$x_n = \frac{1}{5} - \frac{1}{5n}$$

Si ha $x_1 = 0$, mentre $x_n > 0 \quad \forall n \geq 2$. Inoltre

$$x_n < \frac{1}{5} \quad \forall n \geq 1.$$

Si ha immediatamente che $\inf A = \min A = 0$. Proviamo che

$\sup A = \frac{1}{5}$. Abbiamo già osservato che $x_n < \frac{1}{5} \quad \forall n \geq 1$.

Basta provare che $\forall \varepsilon > 0 \exists n \geq 1$ t.c. $\frac{1}{5} - \varepsilon < x_n$.

Sia allora $\varepsilon > 0$ fissato; abbiamo $\frac{1}{5} - \varepsilon < x_n \Leftrightarrow \frac{1}{5} - \varepsilon < \frac{1}{5} - \frac{1}{5n}$

$\Leftrightarrow \varepsilon > \frac{1}{5n}$. La proprietà archimedeica dei nr. reali garantisce che $\exists n \in \mathbb{N} : \varepsilon > \frac{1}{5n}$ che è quanto vogliamo.

Per l'arbitrarietà di ε si conclude la dimostrazione. $\square$

ii) Abbiamo già osservato che $\inf A = \min A = 0$, mentre $\sup A$ non è massimo ($\nexists x_n \in A : x_n = \frac{1}{5}$). $\blacksquare$

3) Sia $\mathcal{P}(n) = "2^n > 10n"$ $n \in \mathbb{N}$. Abbiamo

i) $\mathcal{P}(6) = "2^6 = 64 > 10 \cdot 6 = 60"$ vero.

ii) Sia $n \geq 6$ e supponiamo $\mathcal{P}(n)$ vero. Dimostriamo che allora $\mathcal{P}(n+1)$ è vero.

$$2^{n+1} = 2^n \cdot 2 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{ipotesi induttiva}}}{>} 10 \cdot n \cdot 2.$$

Abbiamo concluso se proviamo che $20n \geq 10(n+1)$.

$$\text{Ora } 20n \geq 10(n+1) \Leftrightarrow 2n \geq n+1 \Leftrightarrow n \geq 1.$$

Per il principio di induzione proviamo assieme che $\mathcal{P}(n)$ è vero $\forall n \geq 6$. $\blacksquare$

4) i) $A = \{x \in \mathbb{R} : \sqrt{x^2 - 3x} \leq x - 1\}$

$$\text{Ov } \sqrt{x^2 - 3x} \leq x - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3x \geq 0 \\ x - 1 \geq 0 \\ x^2 - 3x \leq (x - 1)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0 \text{ o } x \geq 3 \\ x \geq 1 \\ x^2 - 3x \leq x^2 - 2x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ x \geq -1 \end{cases}$$

$A = [3, +\infty[$. □

ii) $\sup A = +\infty$ $\nexists \max A$
 $\inf A = \min A = 3$.

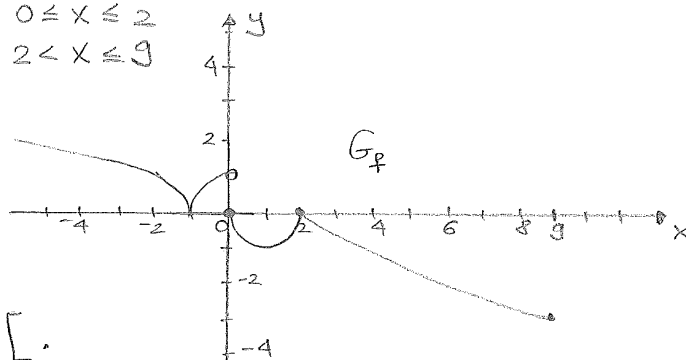
A è un intervallo ; A è limitato inferiormente, ma non superiormente ;

A non è limitato . ■

5) $f:]-\infty, 9] \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} |\sqrt[3]{x+1}| & \text{se } x < 0 \\ x^2 - 2x & \text{se } 0 \leq x \leq 2 \\ -\log_2(x-1) & \text{se } 2 < x \leq 9 \end{cases}$$

$$y = x^2 - 2x \\ = (x-1)^2 - 1$$



i) $\inf f = f(]-\infty, 9]) = \underline{[-3, +\infty[}$.

$x = -1$, $x = 1$, $x = 9$ pt. di min. loc.
 $\downarrow$ $f(-1) = 0$ $\downarrow$ $f(1) = -1$ $\downarrow$ $f(9) = -3$
 $x = 2$ pt. di max. loc.
 $\rightarrow$ $f(2) = 0$ □

ii) $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} |\sqrt[3]{x+1}| = 1 \neq f(0) = 0 = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 - 2x)$
 f non è continua in $x_0 = 0$.

$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (x^2 - 2x) = 0 = f(2) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (-\log_2(x-1))$
 f è continua in $x_0 = 2$. ■

$$6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 \sin 3x}{1 - \cos x^2} = \underline{\underline{6}}.$$

$$\begin{aligned} \text{Infatti } \frac{x^3 \sin 3x}{1 - \cos x^2} &= x^3 \frac{\sin 3x}{3x} \cdot \frac{3x}{\frac{1 - \cos x^2}{x^4}} \cdot x^4 = \\ &= \frac{\sin 3x}{3x} \cdot \frac{1}{\frac{1 - \cos x^2}{x^4}} \cdot \frac{3x^4}{x^4} \\ &\xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{\frac{1}{2}} \cdot 3 = 6 \end{aligned}$$

7) i) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funzione. f è iniettiva in $\mathbb{R}$ se

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}, [x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)]$$

o equivalentemente,

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}, [f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2].$$

Un banale esempio di funzione non iniettiva su $\mathbb{R}$ è $f(x) = 2 \forall x \in \mathbb{R}$.

ii) Scrivete l'enunciato del teorema del confronto:

"Siano f, g, h da X in $\mathbb{R}$ e $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ pt. di accumulazione per X .

Se

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = l \in \overline{\mathbb{R}}$$

e se esiste un intorno U di x_0 t.c.

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x) \quad \forall x \in U \cap X \setminus \{x_0\},$$

allora

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l.$$

FILA (C)

1) i) $z^2 + i |z|^2 - 16i = 0$: Poniamo $z = x + iy$ e otteniamo

$$(x+iy)^2 + i(x^2+y^2) - 16i = 0;$$

quindi

$$x^2 + 2xyi - y^2 + i(x^2+y^2) - 16i = 0,$$

ossia

$$(x^2 - y^2) + (x^2 + y^2 + 2xy - 16)i = 0,$$

da cui

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 0 \\ x^2 + y^2 + 2xy - 16 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x^2 = y^2 \Leftrightarrow x = \pm y.$$

$$\text{Quindi } \begin{cases} x = y \\ 2x^2 + 2x^2 - 16 = 0 \end{cases} \quad \circ \quad \begin{cases} x = -y \\ 2x^2 - 2x^2 - 16 = 0 \text{ impossibile,} \end{cases}$$

$$\text{ossia } \begin{cases} x = y \\ x = \pm 2 \end{cases}.$$

Abbiamo così $z_1 = 2 + 2i$, $z_2 = -2 - 2i$ le soluzioni dell'eq. data.

La forma trigonometrica di z_1 è $z_1 = 2\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$
 $z_2 = 2\sqrt{2} \left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} \right)$.

La forma esponenziale di z_1 è $z_1 = 2\sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}$
 di z_2 è $z_2 = 2\sqrt{2} e^{i\frac{5\pi}{4}}$.

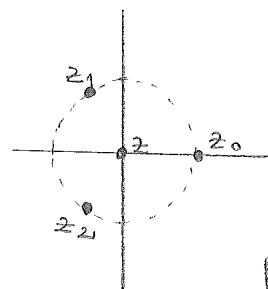
□

ii) $z^4 = 3z \Leftrightarrow z(z^3 - 3) = 0 \Leftrightarrow z = 0 \quad \circ \quad z^3 = 3.$

$$\text{Ora } z^3 = 3 \Leftrightarrow z_0 = \sqrt[3]{3}$$

$$z_1 = \sqrt[3]{3} \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right)$$

$$z_2 = \sqrt[3]{3} \left(\cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} \right).$$



■

2) i) $A = \{x_n = \frac{3+(-1)^n}{n} : n \in \mathbb{N}, n \geq 1\}$

$$x_n = \begin{cases} \frac{4}{n} & \text{se } n \text{ è pari} \\ \frac{2}{n} & \text{se } n \text{ è dispari.} \end{cases}$$

Si ha $0 < x_n \leq 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1$. Segue subito che $\sup A = \max A = 2$ (infatti $x_1 = x_2 = 2 \in A$, e $x_n < 2 \quad \forall n \geq 3$).

Proviamo che $\inf A = 0$. Abbiamo già osservato che $0 < x_n \quad \forall n \geq 1$.

Basta ora provare che $\forall \varepsilon > 0 \exists n \geq 1$, t.c. $0 + \varepsilon > x_n$ e questo segue dalla proprietà archimedea dei nr. reali. $\square$

ii) Abbiamo già osservato che $\sup A = \max A = 2$; mentre $\inf A$ non è minimo ($\nexists x_n \in A : x_n = 0$). $\blacksquare$

3) Sia $\mathcal{P}(n) = "n! > 3n^2"$ $n \in \mathbb{N}$. Abbiamo

i) $\mathcal{P}(5) = "5! = 120 > 3 \cdot 5^2 = 75"$ vero.

ii) Sia $n \geq 5$ e supponiamo $\mathcal{P}(n)$ vero. Dimostriamo che allora $\mathcal{P}(n+1)$ è vero.

$$(n+1)! = (n+1)n! \underset{\text{ipotesi induttiva}}{>} 3n^2(n+1).$$

Abbiamo concluso se proviamo che $3n^2(n+1) \geq 3(n+1)^2$.

$$\text{Ov } n^2(n+1) \geq (n+1)^2 \Leftrightarrow n^2 \geq n+1 \Leftrightarrow n^2 - n - 1 \geq 0$$

e questo è vero $\forall n \geq 2$ e quindi $\forall n \geq 5$.

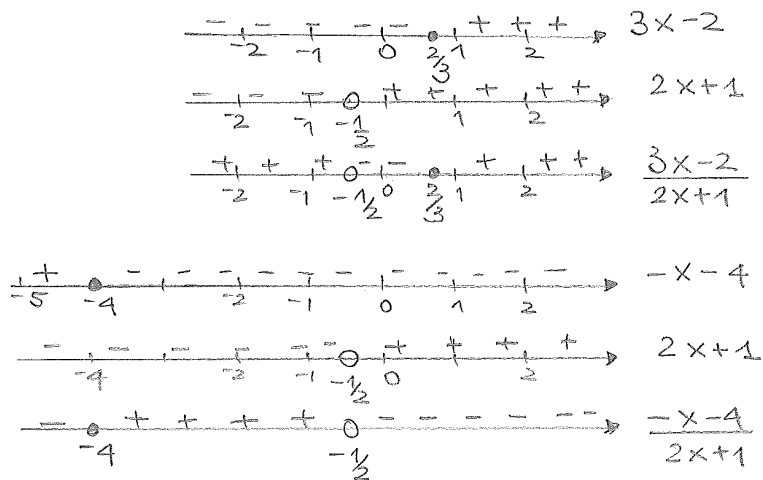
Per il principio di induzione possiamo asserire che $\mathcal{P}(n)$ è vero $\forall n \geq 5$. $\blacksquare$

4) i) $A = \left\{x \in \mathbb{R} : \frac{|x-3|}{|2x+1|} \geq 1\right\}$

$$\left| \frac{x-3}{2x+1} \right| \geq 1 \Leftrightarrow \frac{x-3}{2x+1} \leq -1 \quad \vee \quad \frac{x-3}{2x+1} \geq 1.$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-3+2x+1}{2x+1} \leq 0 \quad \vee \quad \frac{x-3-2x-1}{2x+1} \geq 0$$

$$\frac{3x-2}{2x+1} \leq 0 \quad \vee \quad \frac{-x-4}{2x+1} \geq 0$$



$$A = [-4, -\frac{1}{2}] \cup [-\frac{1}{2}, \frac{2}{3}]$$

□

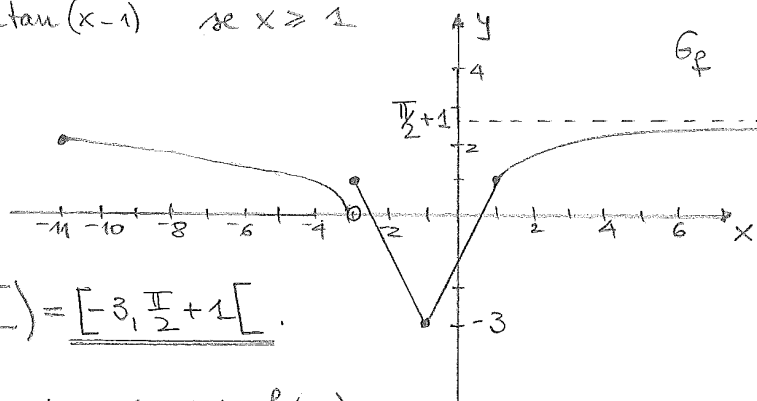
ii) $\sup A = \max A = \frac{2}{3}$; $\inf A = \min A = -4$.

A non è un intervallo, A è limitato.

■

5) $f: [-11, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} -\sqrt[3]{x+3} & \text{se } -11 \leq x < -3 \\ 2|x+1|-3 & \text{se } -3 \leq x < 1 \\ 1 + \arctan(x-1) & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$



i) $\text{im} f = f([-11, +\infty[) = [-3, \frac{\pi}{2} + 1[$.

$x = -1$ pt. di minimo locale; $f(-1) = -3$

$x = -11, x = -3$ pt. di massimo locale;

$f(-11) = 2$ $f(-3) = 1$.

□

i) $\lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -3^-} (-\sqrt[3]{x+3}) = 0 \neq f(-3) = 1$ f non è continua in $x_0 = -3$.

$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} [2|x+1|-3] = 1 = f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} [1 + \arctan(x-1)]$
 f è continua in $x_0 = 1$.

6) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1}{1 - \cos 2x} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$

In fatti: $\frac{e^{x^2} - 1}{1 - \cos 2x} = \frac{e^{x^2} - 1}{x^2} \cdot \frac{x^2}{(2x)^2} \cdot \frac{1}{4x^2} \rightarrow 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

Annotations:
 - Arrow from x^2 to 1 for $x \rightarrow 0$ in the first fraction.
 - Dashed circle around $\frac{x^2}{(2x)^2}$ with arrow pointing to $\frac{1}{2}$ for $x \rightarrow 0$.
 - $\frac{1}{4x^2}$ is crossed out.

7) i) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione. f è strettamente decrescente in $\mathbb{R}$ se
 $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}, [x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)]$.

Un banale esempio di funzione non strett. decrescente: $f(x) = 2 \forall x \in \mathbb{R}$.

ii) Scrivere l'enunciato del teorema d'esistenza della radice n -esima in $\mathbb{C}$.

" Sia $w \in \mathbb{C}$ e sia $n \geq 2$. Se $w = 0$, la sola soluzione di $z^n = w$ è $z = 0$.

Se $w \neq 0$, l'eq. $z^n = w$ ha esattamente n soluzioni complesse distinte date

da:

$$z_k = \sqrt[n]{|w|} \left[\cos\left(\frac{\arg w}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{\arg w}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) \right]$$

$k = 0, 1, 2, \dots, n-1.$

FILA (D)

1) i) $(z\bar{z}) + \bar{z}^2 + 8i - 8 = 0$: Poniamo $z = x + iy$ e otteniamo

$$x^2 + y^2 + (x - iy)^2 + 8i - 8 = 0 ;$$

quindi

$$x^2 + y^2 + x^2 - 2xyi - y^2 + 8i - 8 = 0 ,$$

ossia

$$2(x^2 - 4) - 2(4 + xy)i = 0 ,$$

da cui

$$\begin{cases} x^2 - 4 = 0 \\ xy - 4 = 0 \end{cases}$$

Quindi $z_1 = 2 + 2i$, $z_2 = -2 - 2i$ sono le soluzioni dell'eq. data.

La forma trigonometrica di z_1 è $z_1 = 2\sqrt{2} \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \right)$
 $z_2 = 2\sqrt{2} \left(\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{5\pi}{4}\right) \right)$.

La forma esponenziale di z_1 è $z_1 = 2\sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}$

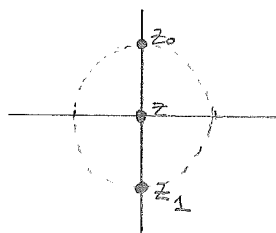
di z_2 è $z_2 = 2\sqrt{2} e^{i\frac{5\pi}{4}}$.

□

ii) $z^3 = -3z \Leftrightarrow z(z^2 + 3) = 0 \Leftrightarrow z = 0 \text{ o } z^2 = -3$.

Ovvero $z^2 = -3 = 3(\cos \pi + i \sin \pi)$ e quindi $z_0 = \sqrt{3} \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right)$

$z_1 = \sqrt{3} \left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} \right)$



■

2) i) $A = \{x_n = \frac{3n-1}{n} : n \in \mathbb{N}, n \geq 1\}$

$$x_n = 3 - \frac{1}{n}$$

Si ha $x_1 = 2$, mentre $2 < x_n < 3 \quad \forall n \geq 2$. Si

ha immediatamente che $\inf A = \min A = 2$.

Proviamo che $\sup A = 3$. Abbiamo già osservato che $x_n < 3 \quad \forall n \geq 1$.

Basta provare che $\forall \varepsilon > 0 \exists n \geq 1$ t.c. $3 - \varepsilon < x_n$, ossia $\exists n \geq 1$ t.c. $-\varepsilon < -\frac{1}{n}$, ossia $\varepsilon > \frac{1}{n}$, e questo è vero grazie alla proprietà archimedeica dei nr. reali. $\square$

ii) Abbiamo già osservato che $\inf A = \min A = 2$, mentre $\sup A$ non è massimo ($\nexists x_n \in A : x_n = 3$). $\blacksquare$

3) Sia $P(n) = "3^n > 2n"$ $n \in \mathbb{N}$. Abbiamo

i) $P(1) = "3 > 2"$ vero.

ii) Sia $n \geq 1$ e supponiamo $P(n)$ vero. Dimostriamo che allora $P(n+1)$ è vero.

$$3^{n+1} = 3^n \cdot 3 > 2n \cdot 3 = 6n.$$

$\uparrow$ ip. induttiva

Abbiamo concluso se proviamo che $6n \geq 2(n+1)$, per $n \geq 1$.

Ora $4n \geq 2 \Leftrightarrow 2n \geq 1$, e questo è vero $\forall n \geq 1$.

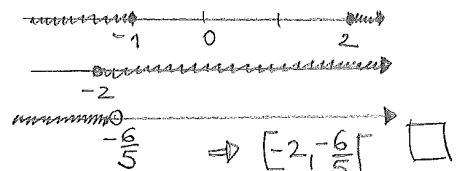
Per il principio di induzione possiamo asserire che $P(n)$ è vero $\forall n \geq 1$.

4) i) $A = \{x \in \mathbb{R} : \sqrt{x^2 - x - 2} > x + 2\}$

$$\sqrt{x^2 - x - 2} > x + 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x - 2 \geq 0 \\ x + 2 < 0 \end{cases} \quad \circ \quad \begin{cases} x^2 - x - 2 \geq 0 \\ x + 2 \geq 0 \\ x^2 - x - 2 > (x + 2)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)(x+1) \geq 0 \\ x < -2 \end{cases} \quad \circ \quad \begin{cases} (x-2)(x+1) \geq 0 \\ x \geq -2 \\ 5x < -6 \end{cases}$$

$$A =]-\infty, -\frac{6}{5}[.$$



ii) $\inf A = -\infty$ $\nexists \min A$
 $\sup A = -\frac{6}{5}$ $\nexists \max A$

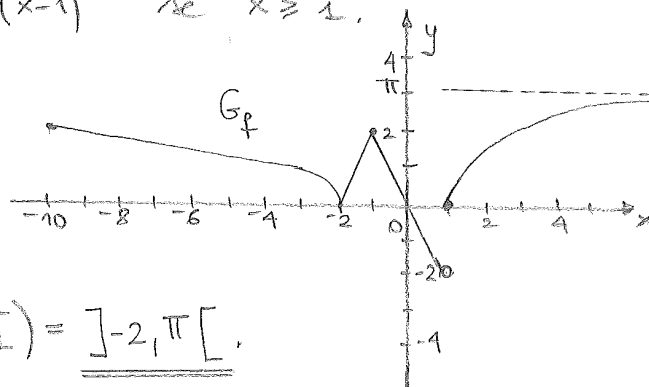
A è un intervallo; A non è limitato inferiormente, quindi

A non è limitato. $\blacksquare$

5) $f: [-10, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} -\sqrt[3]{x+2} & \text{se } -10 \leq x < -2 \\ -2|x+1|+2 & \text{se } -2 \leq x < 1 \\ 2 \arctan(x-1) & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

ii)



$$\text{im} f = f([-10, +\infty[) =]-2, \pi[.$$

$x = -2$ pt. di min. locale $f(-2) = 0$;

$x = -10$, $x = -1$ pt. di massimo locale

$f(-10) = 2$

$f(-1) = 2$

□

ii) $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^-} [-\sqrt[3]{x+2}] = 0 = f(0) = \lim_{x \rightarrow -2^+} [-2|x+1|+2]$

f è continua in $x_0 = -2$.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} [-2|x+1|+2] = -2 \neq f(1) = 0$$

f non è continua in $x_0 = 1$. ■

6) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \log(1+3x)}{\sin x^2} = \underline{3}.$

Infatti $\frac{x \log(1+3x)}{\sin x^2} = x \cdot \frac{\log(1+3x)}{3x} \cdot \frac{3x}{\sin x^2} =$

$$= \frac{\log(1+3x)}{3x} \cdot 3 \frac{x^2}{\sin x^2} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{1}{1} \cdot 3 \cdot 1 = 3$$

■

7) i) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione. f è suriettiva se $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, ossia se $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}$ tale che $y = f(x)$.

Un banale esempio di funzione $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ non suriettiva è

$$f(x) = 2 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$



ii) Scrivere l'enunciato del teorema della permanenza del segno.

" Sia $f: X \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione, $x_0 \in \bar{\mathbb{R}}$ un pt. di accumulazione per X ,
 $l \in \bar{\mathbb{R}}$. Se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$, $l > 0$ (analog. $l < 0$),
allora $\exists$ un intorno U di x_0 t.c.

$$f(x) > 0 \quad (\text{resp. } < 0)$$

$$\forall x \in U \cap X \setminus \{x_0\}.$$

