

Università di Trento - Dip. di Ingegneria e Scienza dell'Informazione  
CdL in Informatica - CdL in Ingegneria Elettronica e delle Telecom.  
CdL in Ingegneria dell'Informazione e Gestione d'Impresa

SECONDA PROVA INTERMEDIA DI ANALISI MATEMATICA 1

a.a. 2014/2015 - Trento, 20 dicembre 2014

FILA (A)

1)  $f(x) = |x^2 - x| e^{x+1}$   
 $= |x(x-1)| e^{x+1}$

•  $\text{dom } f = \mathbb{R} = ]-\infty, +\infty[$

• nessuna simmetria evidente

• segno:  $f(x) \geq 0$  e  $= 0 \Leftrightarrow x=0, x=1$

•  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x^2 - x|}{e^{-x}} = 0$   $y=0$  asint. orizzontale per  $f$ , per  $x \rightarrow -\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

• Continuità di  $f$  su tutto  $\mathbb{R}$  essendo composta e prodotto di funzioni continue su  $\mathbb{R}$ .

•  $\text{dom } f' = \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$   $f(x) = \begin{cases} (x^2 - x) e^{x+1} & \text{se } x \leq 0 \text{ o } x \geq 1 \\ (-x^2 + x) e^{x+1} & \text{se } 0 < x < 1 \end{cases}$

Si ha

$f'(x) = \begin{cases} (2x-1)e^{x+1} + (x^2-x)e^{x+1} & \text{se } x < 0 \text{ o } x > 1 \\ (-2x+1)e^{x+1} + (-x^2+x)e^{x+1} & \text{se } 0 < x < 1 \end{cases}$

$f'(x) = \begin{cases} (x^2 + x - 1)e^{x+1} & \text{se } x < 0 \text{ o } x > 1 \\ (-x^2 - x + 1)e^{x+1} & \text{se } 0 < x < 1 \end{cases}$

Perché  $f$  è continua in  $x=0$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = -e = f'_-(0)$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = e = f'_+(0)$

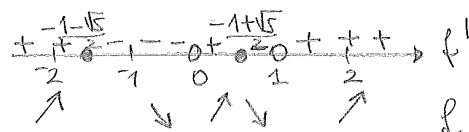
e perché  $f$  è continua in  $x=1$

$\lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = -e^2 = f'_-(1)$

$\lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) = e^2 = f'_+(1)$

Oss. inoltre che  $X^2 + X - 1 = 0 \Leftrightarrow x_{1/2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$

sono gli unici pt. critici per  $f$



$x = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$  pt. di max. loc. stretto per  $f$

$x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$  pt. di max. loc. stretto per  $f$

$\text{dom } f'' = \text{dom } f'$

$$f''(x) = \begin{cases} (2x+1)e^{x+1} + (x^2+x-1)e^{x+1} & \text{se } x < 0 \text{ o } x > 1 \\ (-2x-1)e^{x+1} + (-x^2-x+1)e^{x+1} & \text{se } 0 < x < 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} (x^2+3x)e^{x+1} & \text{se } x < 0 \text{ o } x > 1 \\ (-x^2-3x)e^{x+1} & \text{se } 0 < x < 1 \end{cases}$$

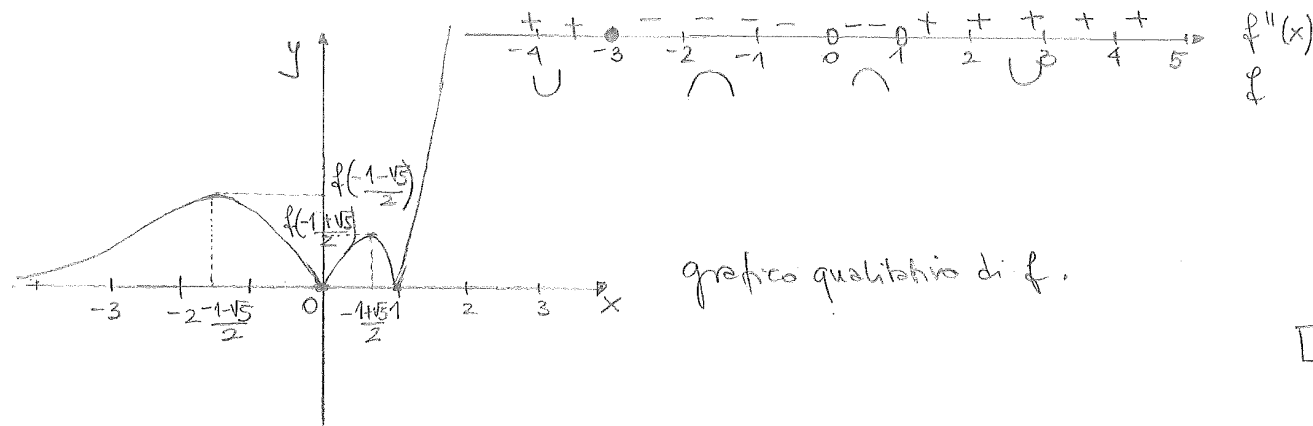


grafico qualitativo di  $f$ .



2) i)  $f(x) = 2x \cos x + 6 \arctan x^3$

$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$  per  $x \rightarrow 0$

$\arctan x = x + o(x)$  per  $x \rightarrow 0$

$f(x) = 2x \left( 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \right) + 6x^3 + o(x^3)$

$= 2x - x^3 + 6x^3 + o(x^3)$

$= 2x + 5x^3 + o(x^5)$  per  $x \rightarrow 0$ .

$P_3(x) = 2x + 5x^3$



ii) Osserviamo che  $f(t) = 1 + t^2 - e^{t^2} + t \log(1+t)$  è una funzione continua in  $]-1, +\infty[$  e

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^x f(t) dt}{x^3} = \left[ \frac{0}{0} \right].$

Grazie al teorema fond. del calcolo integrale si ha che il numeratore è derivabile e  $(\int_0^x f(t) dt)' = f(x)$ . Osserviamo che

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\int_0^x f(t) dt)'}{(x^3)'} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{3x^2} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cancel{1} + \cancel{x^2} - \cancel{1} - \cancel{x^2} - \frac{\cancel{x^4}}{2} + o(x^4) + x^2 + o(x^2)}{3x^2} = \frac{1}{3}.$$

Applicando il teorema di de l'Hôpital possiamo concludere che esiste  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^x f(t) dt}{x^3}$  e vale  $\frac{1}{3}$ . ■

3) i)  $\sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{\frac{n^2+1}{n!}}_{a_n}$  : serie a termini positivi; ovviamente  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$ , e quindi è soddisfatta la cond. nec. affinché una serie converga.

$$\text{Ora } \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^2+1}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^2+1} = \frac{n^2+2n+2}{(n+1)(n^2+1)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Per il criterio del rapporto possiamo concludere che la serie data risulta convergente. □

$\sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{n \log(1 + \frac{1}{n^2})}_{a_n}$  : serie a termini positivi; risulta  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$ . Inoltre

$$n \log(1 + \frac{1}{n^2}) \sim n \cdot \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n} \quad \text{per } n \rightarrow +\infty.$$

Poiché la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  è divergente, anche la serie data risulta divergente per il criterio del confronto asintotico. □

ii)  $\sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{\frac{n+1}{\sqrt{n^3+3}}}_{a_n} (x-7)^n$  : la serie data è una serie di potenze. Poniamo  $x-7=t$  e studiamo la convergenza di  $\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{n+1}{\sqrt{n^3+3}}}_{a_n} t^n$ .   
  $a_n > 0$

Abbiamo

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+2}{\sqrt{(n+1)^3+3}} \cdot \frac{\sqrt{n^3+3}}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1,$$

quindi il raggio di convergenza della serie  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{\sqrt{n^3+3}} t^n$  è  $r=1$ ;  
risulta che  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{\sqrt{n^3+3}} t^n$  è convergente  $\forall t \in ]-1, 1[$ .

Per  $t=1$  la serie è divergente, poiché  $\frac{n+1}{\sqrt{n^3+3}} \sim \frac{1}{n^{3/2-1}} = \frac{1}{n^{1/2}}$   
e  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/2}} = +\infty$ . Per  $t=-1$ , la serie data si presenta come

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{\sqrt{n^3+3}} (-1)^n$  che è convergente grazie al criterio di Leibniz.

In conclusione  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{\sqrt{n^3+3}} t^n$  è convergente per  $t \in [-1, 1[$ ; dunque

la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{\sqrt{n^3+3}} (x-7)^n$  è convergente su  $\underline{E = [6, 8]}$ . ■

4) i)  $\int f(x) dx = \int \frac{x+1}{x^2-4} dx = \int \frac{x+1}{(x-2)(x+2)} dx.$

Ora  $\frac{x+1}{x^2-4} = \frac{a}{x-2} + \frac{b}{x+2}$  con  $a, b$  da determinare

$$= \frac{a(x+2) + b(x-2)}{(x-2)(x+2)} = \frac{(a+b)x + 2a - 2b}{(x-2)(x+2)}$$

Deve essere  $\begin{cases} a+b=1 \\ 2a-2b=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1-b \\ 2(1-b)-2b=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1-b \\ -4b=-1 \end{cases}$

$$\begin{cases} b = \frac{1}{4} \\ a = \frac{3}{4} \end{cases}$$

Allora  $\int \frac{x+1}{x^2-4} dx = \frac{3}{4} \int \frac{1}{x-2} dx + \frac{1}{4} \int \frac{1}{x+2} dx$

$$= \frac{3}{4} \log|x-2| + \frac{1}{4} \log|x+2| + C, \quad C \in \mathbb{R} \quad \square$$

ii)  $\int_0^1 x e^{2x} dx = \left[ \frac{x e^{2x}}{2} - \frac{e^{2x}}{4} \right]_0^1$

$$= \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{4} (e^2 + 1).$$

$\int x e^{2x} dx = x \frac{e^{2x}}{2} - \int \frac{e^{2x}}{2} dx$   
 $= \frac{x e^{2x}}{2} - \frac{e^{2x}}{4} + C$ 
■

$$5) \int_2^{+\infty} \frac{x+1}{\sqrt{(x-2)^\alpha} x^{3\alpha}} dx \quad f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{(x-2)^\alpha} x^{3\alpha}} \text{ è continua su } ]2, +\infty[ \text{ e positiva.}$$

Dobbiamo indagare come  $f$  si comporta quando  $x \rightarrow 2^+$  e quando  $x \rightarrow +\infty$ . Notiamo che,

$$\text{per } x \rightarrow 2^+, \quad f(x) \sim \frac{3}{(x-2)^{\frac{\alpha}{2}} 2^{3\alpha}}. \quad \text{Poiché } \int_2^3 \frac{1}{2(x-2)^{\frac{\alpha}{2}}} dx < +\infty \Leftrightarrow \frac{\alpha}{2} < 1,$$

$$\text{ovvero } \alpha < 2, \text{ per il criterio del confronto asintotico}$$

$$\int_2^3 f(x) dx < +\infty \Leftrightarrow \alpha < 2;$$

$$\text{per } x \rightarrow +\infty, \quad f(x) \sim \frac{x}{x^{\frac{\alpha}{2}} \cdot x^{\frac{3\alpha}{2}}} = \frac{1}{x^{\frac{\alpha}{2} + \frac{3\alpha}{2} - 1}}. \quad \text{Poiché } \int_3^{+\infty} \frac{1}{x^{2\alpha-1}} dx < +\infty$$

se e solo se  $2\alpha - 1 > 1$ , ossia  $\alpha > 1$ , per il

$$\text{criterio del confronto asintotico } \int_3^{+\infty} f(x) dx < +\infty \Leftrightarrow \alpha > 1.$$

$$\text{In definitiva, } \int_2^{+\infty} \frac{x+1}{\sqrt{(x-2)^\alpha} x^{3\alpha}} dx < +\infty \Leftrightarrow \boxed{1 < \alpha < 2}.$$

6)  $y'(x) = a(x)y(x) + b(x)$  con  $a(x), b(x)$  due funzioni continue assegnate su un intervallo  $I \subseteq \mathbb{R}$ , e  $y \in \mathcal{C}^1(I)$  da determinare.

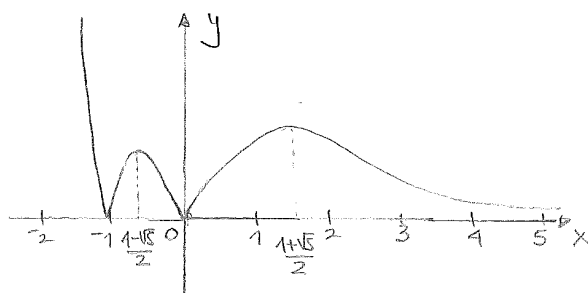
7) Teorema di Rolle: Sia  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continua, derivabile in  $]a, b[$  e t.c.  $f(a) = f(b)$ .

Allora  $\exists c \in ]a, b[$  t.c.  $f'(c) = 0$ .

FILA (B)

1)  $f(x) = |x^2 + x| e^{-x+1}$  : si procede come in Es. 1, FILA (A).

Osservo che  $f(x)$  data è uguale a  $g(-x)$ , dove  $g(x) = |x^2 - x| e^{x+1}$  è la funzione assegnata in Es. 1, FILA (A); segue allora che il grafico qualitativo di  $f$  qui sopra è :



2) i)  $f(x) = 10x^2 \arctan x - 3 \log(1+2x)$

$$\arctan x = x + o(x)$$

$$\log(1+2x) = 2x - \frac{4x^2}{2} + \frac{8x^3}{3} + o(x^3)$$

$$\begin{aligned} f(x) &= 10x^2(x + o(x)) - 3\left(2x - 2x^2 + \frac{8}{3}x^3 + o(x^3)\right) \\ &= 10x^3 + o(x^3) - 6x + 6x^2 - 8x^3 + o(x^3) \\ &= -6x + 6x^2 + 2x^3 + o(x^3) \quad \text{per } x \rightarrow 0. \end{aligned}$$

$P_3(x) = -6x + 6x^2 + 2x^3$

ii) Osserviamo che  $f(t) = t - 3 \sin t + 2te^t$  è una funzione continua in  $\mathbb{R}$  e

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^x f(t) dt}{x^3} = \left[ \frac{0}{0} \right].$$

Grazie al teorema fond. del calcolo integrale si ha che il numeratore è derivabile e  $\left(\int_0^x f(t) dt\right)' = f(x)$ . Osserviamo che

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\left(\int_0^x f(t) dt\right)'}{(x^3)'} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - 3x + \frac{3}{3!}x^3 + o(x^3) + 2x + 2x^2 + o(x^2)}{3x^2} \\ &= \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Applicando il teorema di de l'Hôpital possiamo concludere che esiste  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^x f(t) dt}{x^3}$  e vale  $\frac{2}{3}$ .

3) i)  $\sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{\frac{n!}{n^3+3}}_{a_n}$  : serie a termini positivi; poiché  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$ , la serie è divergente (non è soddisfatta la cond. nec. affinché una serie converga; poiché è una serie a termini positivi possiamo concludere che è divergente).  $\square$

$\sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{n \left(1 - \cos \frac{1}{n^2}\right)}_{a_n}$  : serie a termini positivi; risulta  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$ . Inoltre

$$n \left(1 - \cos \frac{1}{n^2}\right) \sim n \cdot \frac{1}{2n^4} = \frac{1}{2n^3} \quad \text{per } n \rightarrow +\infty.$$

Poiché la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$  è convergente, per il criterio del confronto asintotico risulta convergente anche la serie data.  $\square$

ii)  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2n+7}{\sqrt{n^5+1}} (x-5)^n$  : La serie data è una serie di potenze.

Poniamo  $x-5=t$  e studiamo la convergenza della serie  $\sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{\frac{2n+1}{\sqrt{n^5+1}}}_{a_n > 0} t^n$ .

Abbiamo

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2n+3}{\sqrt{(n+1)^5+1}} \cdot \frac{\sqrt{n^5+1}}{2n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1,$$

quindi il raggio di convergenza della serie  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{\sqrt{n^5+1}} t^n$  è  $r=1$ ; risulta che  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{\sqrt{n^5+1}} t^n$  è convergente  $\forall t \in ]-1, 1[$ .

Per  $t=1$  la serie è convergente, poiché  $\frac{2n+1}{\sqrt{n^5+1}} \sim \frac{2}{n^{5/2-1}} = \frac{2}{n^{3/2}}$  e  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}} < +\infty$ . Per  $t=-1$  risulta convergente, essendo

assoluta convergente (o anche grazie al criterio di Leibniz).

In conclusione, la serie  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2n+1}{\sqrt{n^5+1}} t^n$  è convergente per  $t \in [-1, 1]$ ;

dunque la serie data  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2n+1}{\sqrt{n^5+1}} (x-5)^n$  è convergente su  $E = [4, 6]$ . ■

$$4) i) \int f(x) dx = \int \frac{x+1}{x^2-4x+3} dx = \int \frac{x+1}{(x-3)(x-1)} dx$$

$$\text{Ora } \frac{x+1}{(x-3)(x-1)} = \frac{a}{x-3} + \frac{b}{x-1} \quad \text{con } a, b \text{ da determinare}$$

$$= \frac{a(x-1) + b(x-3)}{(x-3)(x-1)} = \frac{(a+b)x - a - 3b}{(x-3)(x-1)}$$

$$\text{Dove essere } \begin{cases} a+b=1 \\ -a-3b=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1-b \\ -1+b-3b=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1-b \\ -2b=2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b=-1 \\ a=2 \end{cases}$$

$$\text{Allora } \int \frac{x+1}{x^2-4x+3} dx = 2 \int \frac{1}{x-3} dx - \int \frac{1}{x-1} dx$$

$$= 2 \log|x-3| - \log|x-1| + C, \quad \mathbb{C} \in \mathbb{R}, \quad \square$$

$$ii) \int_0^1 x \cos 2x dx = \left[ x \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\cos 2x}{4} \right]_0^1 \quad \left| \begin{aligned} \int x \cos 2x dx &= x \frac{\sin 2x}{2} - \int \frac{\sin 2x}{2} dx \\ &= x \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\cos 2x}{4} + C \end{aligned} \right.$$

$$= \frac{\sin 2}{2} + \frac{\cos 2}{4} - \frac{1}{4}.$$

$$5) \int_1^{+\infty} \frac{x+2}{\sqrt[3]{(x-1)^4} x^{5d}} dx \quad f(x) = \frac{x+2}{\sqrt[3]{(x-1)^4} x^{5d}} \quad \text{è continua e positiva su } ]1, +\infty[.$$

Dobbiamo indagare come  $f$  si comporta

quando  $x \rightarrow 1^+$  e quando  $x \rightarrow +\infty$ . Notiamo che,

$$\text{per } x \rightarrow 1^+, \quad f(x) \sim \frac{3}{(x-1)^{4/3}}. \quad \text{Poiché } \int_1^2 \frac{1}{(x-1)^{4/3}} dx < +\infty \Leftrightarrow \frac{4}{3} < 1,$$

ovvero  $d < 3$ , per il criterio del confronto asintotico

$$\int_1^2 f(x) dx < +\infty \Leftrightarrow d < 3;$$

per  $x \rightarrow +\infty$ ,  $q(x) \sim \frac{x}{x^{4/3} x^{5/3}} = \frac{1}{x^{2d-1}}$ . Possiede  $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^{2d-1}} dx < +\infty$

se e solo se  $2d-1 > 1$ , ossia  $d > 1$ , per il criterio del confronto asintotico  $\int_2^{+\infty} f(x) dx < +\infty \Leftrightarrow d > 1$ .

In conclusione,  $\int_1^{+\infty} \frac{x+2}{\sqrt[3]{(x-1)^d} x^{5d}} dx < +\infty \Leftrightarrow \boxed{1 < d < 3}$ . ■

6)  $y'(x) = a(x)y(x) + b(x)$  con  $a(x), b(x)$  due funzioni continue assegnate su un intervallo  $I \subseteq \mathbb{R}$ , e  $y \in \mathcal{C}^1(I)$  da determinare. ■

7) Teorema fondamentale del Calcolo Integrale: Sia  $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$  continua,  $F_c(x) = \int_c^x f(t) dt$  per  $c \in [a,b]$  fissato,  $x \in [a,b]$ . Allora  $F_c$  è derivabile su  $[a,b]$  e

$$F_c'(x) = f(x) \quad \forall x \in [a,b].$$
■