

$$1) \boxed{f(x) = |x| \sqrt{1-x^2}}$$

$$\bullet \text{ dom } f = \{x \in \mathbb{R} : 1-x^2 \geq 0\} = [-1, 1]$$

$\bullet$ Il dominio è simmetrico rispetto all'origine e $f(x) = f(-x) \forall x \in [-1, 1]$:

f è pari! quindi basta studiare f su $[0, 1]$!

$\bullet$ Non c'è bisogno di calcolare nessun limite, inoltre $f(x) \geq 0$ su $[-1, 1]$ e $= 0$ se e solo se $x=0$ o $x=\pm 1$.

$\bullet f$ è continua essendo composizione e prodotto di funzioni continue.

$$\bullet \text{ dom } f' =]-1, 1[\setminus \{0\} \text{ e } f'(x) = \frac{x}{|x|} \sqrt{1-x^2} - |x| \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \frac{\frac{x}{|x|}(1-x^2) - |x|x}{\sqrt{1-x^2}} \quad \forall x \in \text{dom } f'$$

$$\text{oss. che per } 0 < x < 1: f'(x) = \frac{1-x^2-x^2}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}$$

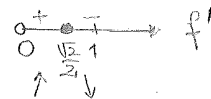
Poiché f è continua in $x=0$ si ha $f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = 1$; per simmetria risulta $x=0$ pt. angolare

poiché f è continua in $x=1$ si ha $f'_-(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = -\infty$ $x=1$ pt. con tangente verticale.

$$\text{Inoltre } f'(x)=0 \Leftrightarrow 1-2x^2=0 \Leftrightarrow x^2=\frac{1}{2} \text{ e quindi } x=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ pt. di max loc. stretto per f

$$f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{1-\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$$



$$\bullet \text{ dom } f'' =]-1, 1[\setminus \{0\}$$

$$\text{oss. che per } 0 < x < 1: f''(x) = \frac{-4x\sqrt{1-x^2} - (1-2x^2)\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2}$$

$$= \frac{-4x(1-x^2) + x - 2x^3}{(1-x^2)^{3/2}} = \frac{-3x + 2x^3}{(1-x^2)^{3/2}}$$

$$= \frac{x(-3+2x^2)}{(1-x^2)^{3/2}}$$

ora $x^2 = \frac{3}{2}$ e $x = +\sqrt{\frac{3}{2}} > 1$; quindi abbiamo il seg. segno

per f'' :

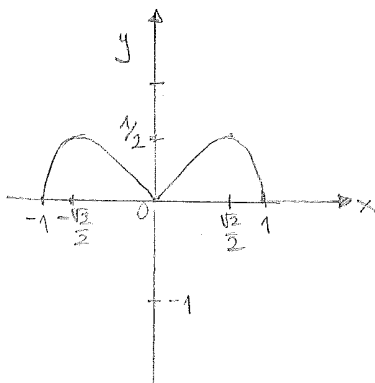


grafico qualitativo di f



$$f(x) = e^{x - |x^2 - x - 2|}$$

$$\bullet \text{ dom } f = \mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$$

• non ci sono simmetrie evidenti!

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0 \quad y = 0 \text{ asintoto orizzontale per } f, \text{ per } x \rightarrow -\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \quad y = 0 \quad " \quad , \text{ per } x \rightarrow +\infty.$$

$$\bullet \text{ osserviamo che } f(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

• f è continua in $\mathbb{R}$, essendo somma e composizione di funzioni continue in $\mathbb{R}$.

$$\bullet \text{ Oss. che } f(x) = e^{x - |(x+1)(x-2)|}, \text{ quindi } \text{dom } f' = \mathbb{R} \setminus \{-1, 2\}$$

$$\text{Si ha } f(x) = \begin{cases} e^{x - (x^2 - x - 2)} & \text{se } x \leq -1 \text{ o } x \geq 2 \\ e^{x + (x^2 - x - 2)} & \text{se } -1 < x < 2, \end{cases}$$

ossia

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x^2 + 2x + 2} & \text{se } x \leq -1 \text{ o } x \geq 2 \\ e^{x^2 - 2} & \text{se } -1 < x < 2. \end{cases}$$

$$\text{Da } f'(x) = \begin{cases} e^{-x^2 + 2x + 2} (-2x + 2) & \text{se } x < -1 \text{ o } x > 2 \\ e^{x^2 - 2} \cdot 2x & \text{se } -1 < x < 2 \end{cases}$$

$$\text{Inoltre, poiché } f \text{ è continua in } \mathbb{R}, \text{ si ha } f'_-(-1) = \frac{1}{e} \quad f'_+(-1) = \frac{-2}{e} \\ f'_-(2) = 4e^2 \quad f'_+(2) = -\frac{2}{e^2}.$$

$$\text{Oss. che } f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ pt. critico per } f.$$

$x = 0$ pt. di min. loc. stretto per f

$$f(0) = \frac{1}{e^2}$$

$$\bullet \text{ dom } f'' = \text{dom } f'$$

$$f''(x) = \begin{cases} e^{-x^2 + 2x + 2} (-2x + 2)^2 - 2e^{-x^2 + 2x + 2} & \text{se } x < -1 \text{ o } x > 2 \\ e^{x^2 - 2} \cdot 4x^2 + 2e^{x^2 - 2} & \text{se } -1 < x < 2 \end{cases}$$

$$f''(x) = \begin{cases} e^{-x^2 + 2x + 2} (-2x + 2)^2 - 2e^{-x^2 + 2x + 2} & \text{se } x < -1 \text{ o } x > 2 \\ e^{x^2 - 2} \cdot 4x^2 + 2e^{x^2 - 2} & \text{se } -1 < x < 2 \end{cases}$$

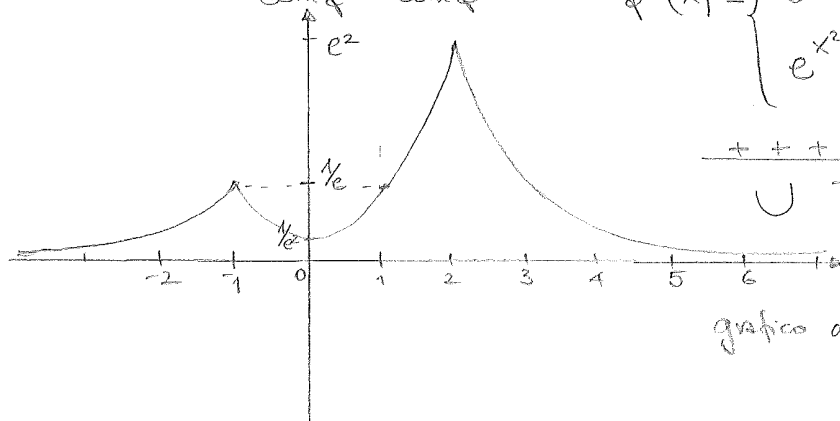


grafico qualitativo di f



$$f(x) = \sqrt{x^2 - |x-1|}$$

$$\begin{aligned} \bullet \text{ dom } f &= \{x \in \mathbb{R} : x^2 - |x-1| \geq 0\} \\ &= \left] -\infty, \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \right] \cup \left[\frac{-1+\sqrt{5}}{2}, +\infty \right[\end{aligned}$$

• non è caso simmetrico evidente!

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$f(x) \sim |x| - \frac{1}{2} \text{ se } x \rightarrow \pm\infty$$

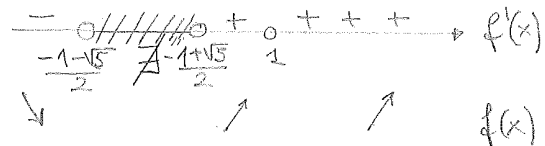
$$\bullet f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \text{dom } f$$

• f è continua sul suo dominio essendo composizione e somma di funtz. continue.

$$\bullet \text{ dom } f' = \text{dom } f \setminus \left\{ \frac{-1-\sqrt{5}}{2}, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}, 1 \right\}$$

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 - x + 1} & \text{se } x \geq 1 \\ \sqrt{x^2 + x - 1} & \text{se } x \in \text{dom } f \cap \left] -\infty, 1 \right[\end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x+1}} & \text{se } x > 1 \\ \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x-1}} & \text{se } x \in \left] -\infty, \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \right[\cup \left] \frac{-1+\sqrt{5}}{2}, 1 \right[\end{cases}$$



Essendo f continua, risulta $f'_+(1) = \frac{1}{2}$ $f'_-(1) = \frac{3}{2}$

$$f'_+\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right) = +\infty \quad f'_-\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right) = -\infty$$

$$\bullet \text{ dom } f'' = \text{dom } f'$$

$$f''(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \cdot \frac{2\sqrt{x^2-x+1} - (2x-1) \frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x+1}}}{(x^2-x+1)} = \frac{1}{2} \frac{4(x^2-x+1) - 4x^2 + 4x - 1}{2(x^2-x+1)^{3/2}} & \text{se } x > 1 \\ \frac{1}{2} \frac{2\sqrt{x^2+x-1} - (2x+1) \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x-1}}}{x^2+x-1} = \frac{1}{2} \frac{4(x^2+x-1) - 4x^2 - 4x - 1}{2(x^2+x-1)^{3/2}} & \text{se } x \in \left] -\infty, \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \right[\cup \left] \frac{-1+\sqrt{5}}{2}, 1 \right[\end{cases}$$

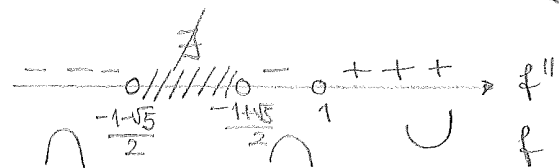
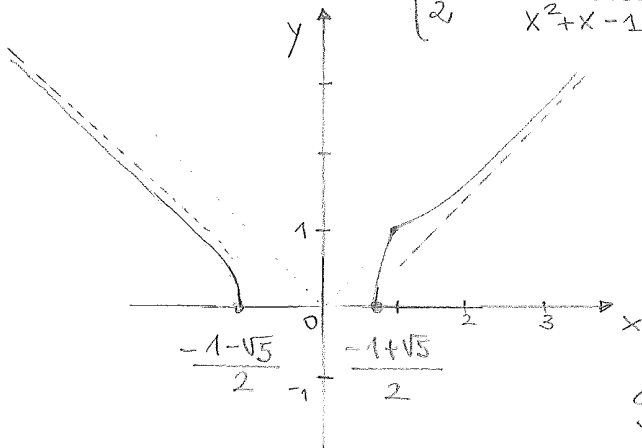


grafico qualitativo di f .



- $\text{dom } f = \mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$

e $f(x) = f(-x)$, Quindi f è pari!

• $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$; inoltre $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{1}{2}$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - \frac{1}{2}x = 0$

$y = \frac{1}{2}|x|$ é assintoto da equação para $x \rightarrow +\infty$
(p.e. $x \rightarrow -\infty$)

- $f(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$, possible

$$f(x) > |x| - \frac{1}{2}|x| = \frac{1}{2}|x| \quad \forall x \in \mathbb{R}_1$$

- $\text{dom } f' = \mathbb{R} \setminus \{0\}$; per $x \geq 0$ abbiamo $f(x) = \sqrt{x^2 + 9} - \frac{1}{2}x$

e per $x > 0$ $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+9}} - \frac{1}{2}$

Essendo f continua in $x=0$, risulta $f'_+(0) = -\frac{1}{2}$.

Halteere $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2x - \sqrt{x^2 + 9}}{2\sqrt{x^2 + 9}} = 0 \Leftrightarrow$

$$2x - \sqrt{x^2 + 9} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2 = x^2 + 9 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 = 9 \\ x \geq 0 \end{cases} \quad x = \sqrt{3}$$

$$x = \sqrt{3} \text{ è pt. critico per } f, \text{ per } x > 0 \quad \text{e} \quad f(\sqrt{3}) = \sqrt{12} - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

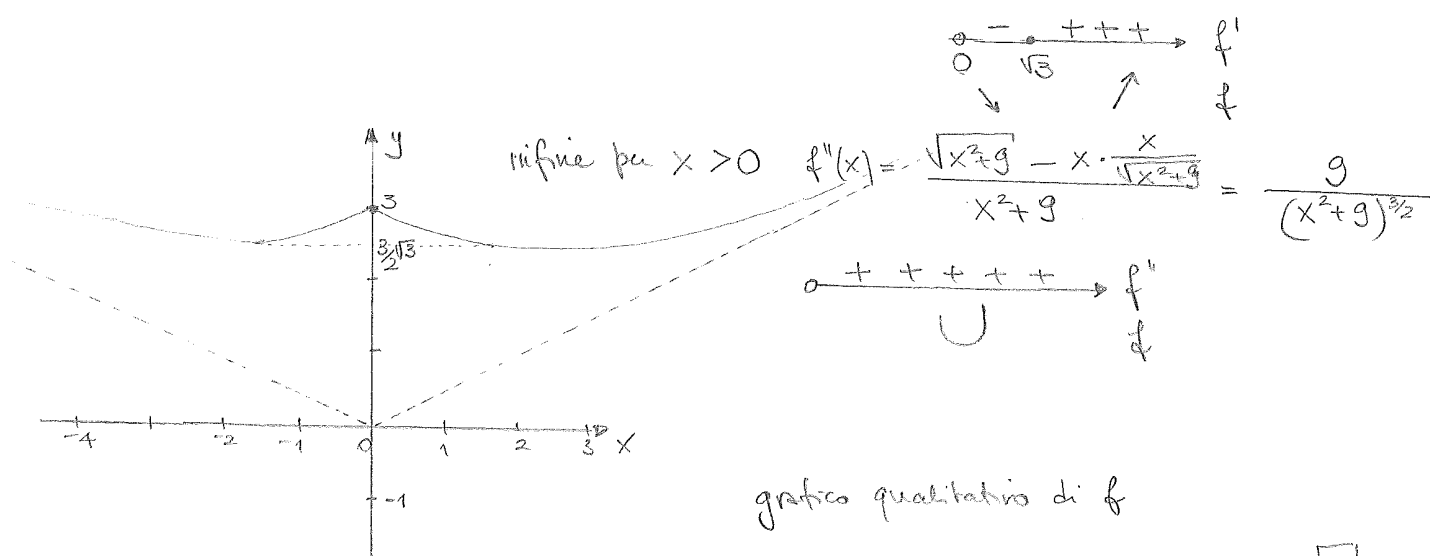


grafico qualitativo di f

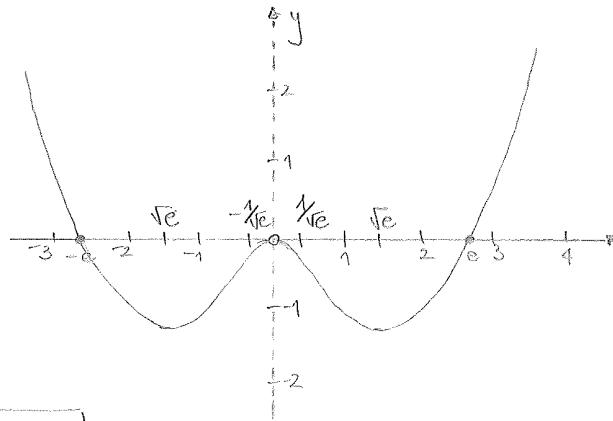


$$f(x) = x^2(\log|x|-1)$$

$$\bullet \text{ dom } f = \mathbb{R} \setminus \{0\} =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$$

• Il dominio di f è simmetrico rispetto all'origine
e $f(x) = f(-x)$! f è pari. Quindi

conoscendo la funzione $f|_{]0, +\infty[}$ (vedi Foglio di esercizi 7, Es. 7))
si ottiene il grafico di f su $\mathbb{R} \setminus \{0\}$:



□

$$f(x) = (x+1)e^{\frac{x}{x-1}}$$

$$\bullet \text{ dom } f = \mathbb{R} \setminus \{1\} =]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[$$

• nessuna simmetria evidente!

• $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$; si ottiene $y = ex + 2e$ asintoto obliquo per f per $x \rightarrow +\infty$
 $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$ $x=1$ asintoto verticale per f , (*) vedi fine es.

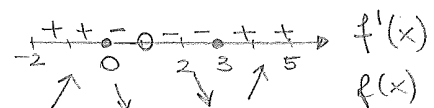
• segno di f : $\begin{array}{ccccccc} - & - & - & + & + & + & + \\ -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & \end{array}$

$$\bullet \text{ dom } f' = \text{dom } f \quad f'(x) = e^{\frac{x}{x-1}} + (x+1)e^{\frac{x}{x-1}} \cdot \frac{(x-1)-x}{(x-1)^2} = e^{\frac{x}{x-1}} \left[1 - \frac{x+1}{(x-1)^2} \right]$$

$$= \frac{e^{\frac{x}{x-1}}}{(x-1)^2} x(x-3) \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = 0.$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0, x = 3$$

$x=0$ pt. di max. loc. stretto per f
 $f(0) = 1$



$x=3$ pt. di min. loc. stretto per f $f(3) = 4e^{\frac{3}{2}}$.

$$\bullet \text{ dom } f'' = \text{dom } f \quad f''(x) = e^{\frac{x}{x-1}} \left(\frac{-1}{(x-1)^2} \frac{x(x-3)}{(x-1)^2} + \frac{(2x-3)(x-1)^2 - (x^2-3x)2(x-1)}{(x-1)^4} \right)$$

$$= e^{\frac{x}{x-1}} \frac{(5x-3)}{(x-1)^4}$$

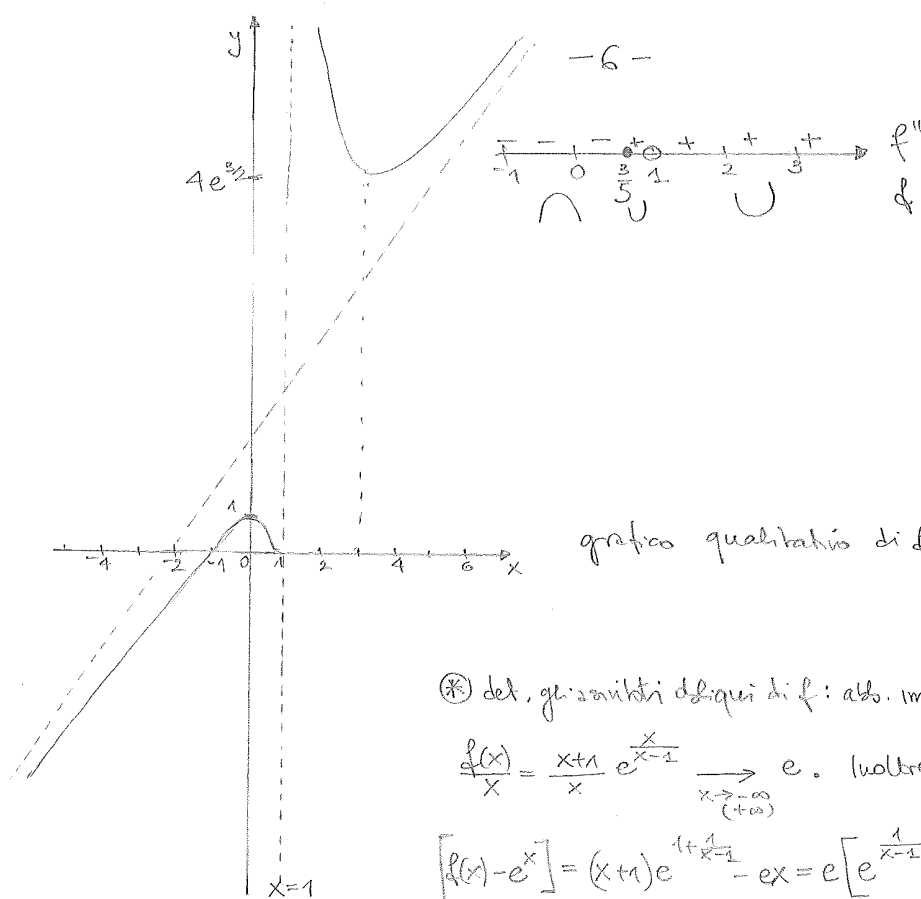


grafico qualitativo di f

(*) det. gli asintoti di f : ab. immed. che

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{x+1}{x} e^{\frac{x}{x-1}} \xrightarrow[x \rightarrow +\infty]{x \rightarrow -\infty} e. \text{ Inoltre}$$

$$\begin{aligned} [f(x) - e^x] &= (x+1)e^{\frac{1}{x-1}} - ex = e \left[e^{\frac{1}{x-1}}(x+1) - x \right] \stackrel{\text{Taylor}}{=} \\ &= e \left[\left(1 + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{2(x-1)^2} + o\left(\frac{1}{(x-1)^2}\right) \right) (x+1) - x \right] \xrightarrow[x \rightarrow +\infty]{x \rightarrow -\infty} 2e. \quad \square \end{aligned}$$

$$f(x) = \log \left| \frac{1+x}{1-x} \right|$$

$$\begin{aligned} \bullet \text{ dom } f &= \{ x \in \mathbb{R} : \left| \frac{1+x}{1-x} \right| \neq 0 \} = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} \\ &=]-\infty, -1[\cup]-1, 1[\cup]1, +\infty[. \end{aligned}$$

• funzione dispari! Studiamola solo su $[0, 1[\cup]1, +\infty[$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty \quad x=1 \text{ asintoto verticale per } f$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty \quad "$$

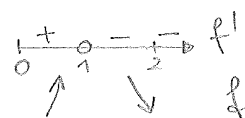
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \quad y=0 \text{ asintoto orizzontale per } f, \text{ per } x \rightarrow +\infty.$$

$$\begin{aligned} \bullet \text{ segno di } f & \text{ su } \text{dom } f \cap [0, +\infty[\quad \left| \frac{1+x}{1-x} \right| > 1 \Leftrightarrow \frac{1+x}{1-x} < -1 \quad \circ \quad \frac{1+x}{1-x} > 1 \\ & \Leftrightarrow \frac{1+x+1-x}{1-x} < 0 \quad \circ \quad \frac{1+x-1+x}{1-x} > 0 \\ & \frac{2}{1-x} < 0 \quad \circ \quad \frac{2x}{1-x} > 0 \\ & \Leftrightarrow x > 1 \quad \quad \quad 0 < x < 1 \end{aligned}$$

• f è continua nel suo dominio

• $\text{dom } f' = \text{dom } f$

$$f'(x) = \frac{1-x}{1+x} \cdot \frac{1-x+1+x}{(1-x)^2} = \frac{2}{1-x^2}$$



• $\text{dom } f'' = \text{dom } f$

$$f''(x) = \frac{2 \cdot (-2x)}{(1-x^2)^2}$$

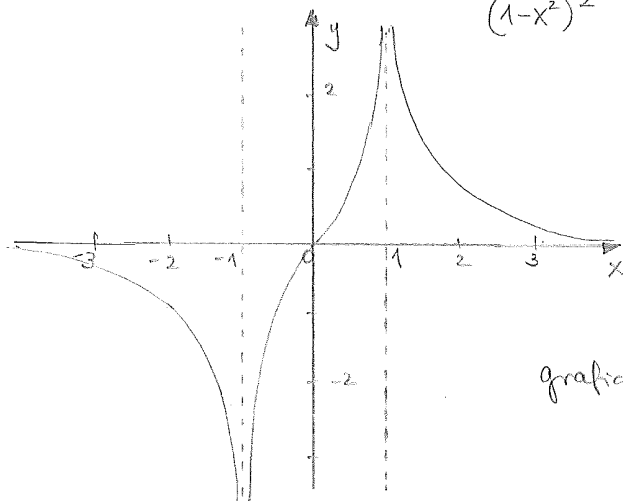
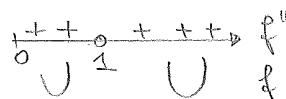


grafico qualitativo di f

□

$$f(x) = \frac{1}{|\sin x + \cos x|}$$

• $\text{dom } f = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{3\pi}{4} + k\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}$

• f è 2π periodica; quindi basta studiarla su $[0, 2\pi] \setminus \left\{ \frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4} \right\}$ (per esempio).

• $\lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{4}^-} f(x) = +\infty = \lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{4}^+} f(x)$

$x = \frac{3\pi}{4}$ asintoto verticale per f

$\lim_{x \rightarrow \frac{7\pi}{4}^-} f(x) = +\infty = \lim_{x \rightarrow \frac{7\pi}{4}^+} f(x)$

$x = \frac{7\pi}{4}$ asintoto verticale per f .

• f è positiva nel suo dominio. Vale 1 nei pt. $x=0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$ e 2π .

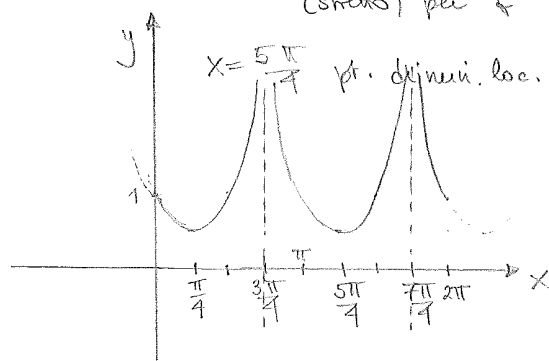
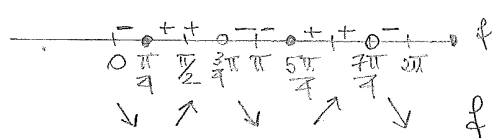
• f è continua nel suo dominio.

• $\text{dom } f' = \text{dom } f$

$$f'(x) = \frac{-(\sin x + \cos x)(\cos x - \sin x)}{(\sin x + \cos x)^2 |\sin x + \cos x|}$$

$f'(x) = 0 \iff x = \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$

Inoltre $x = \frac{\pi}{4}$ pt. di min. loc. (stretto) per f



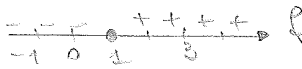
$f(\frac{\pi}{4}) = f(\frac{5\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

■

2) i) $f(x) = \frac{x-1}{x^2+1}$ • $\text{dom } f = \mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$

• nessuna simmetria evidente!

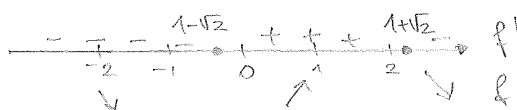
• $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ $y=0$ asintoto orizzontale per f , per $x \rightarrow \pm\infty$.

• segno di f 

• f è continua su tutto $\mathbb{R}$, poiché somma e rapporto di funzioni continue e il denominatore non si annulla mai.

• $\text{dom } f' = \mathbb{R}$ $f'(x) = \frac{x^2+1 - (x-1) \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{-x^2+2x+1}{(x^2+1)^2}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -x^2+2x+1=0 \Leftrightarrow x_{1/2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4+4}}{-2} = 1 \pm \sqrt{2}$
pt. critici per f

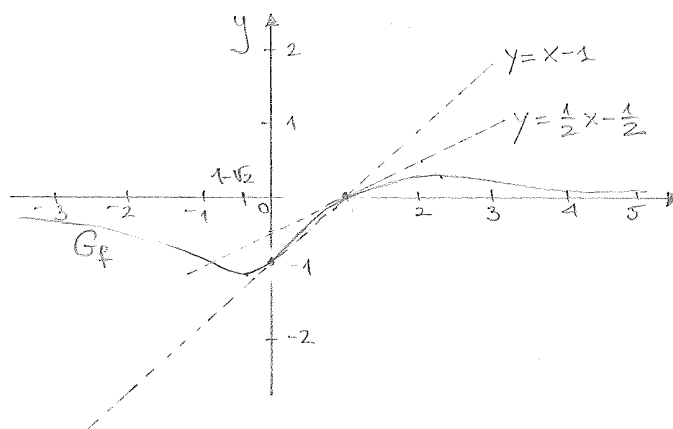


$x = 1-\sqrt{2}$ pt. di min. loc. (stretto) per f

$f(1-\sqrt{2}) = \frac{1-\sqrt{2}-1}{1-2\sqrt{2}+2+1} = \frac{-\sqrt{2}}{4-2\sqrt{2}}$

$x = 1+\sqrt{2}$ pt. di max. loc. (stretto) per f

$f(1+\sqrt{2}) = \frac{1+\sqrt{2}-1}{1+2\sqrt{2}+2+1} = \frac{\sqrt{2}}{4+2\sqrt{2}}$



Eq. retta tg. al grafico di f in

$(0, f(0)) = (0, -1)$

$y = -1 + 1(x-0) \Rightarrow$

$y = x-1$

Eq. retta tg. al grafico di f in $(1, f(1)) = (1, 0)$

$y = 0 + \frac{1}{2}(x-1)$

$y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$

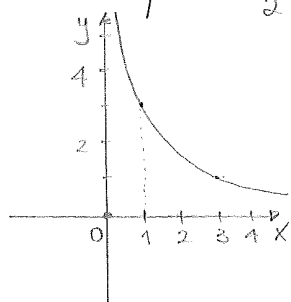
Deve essere $\alpha \geq 0$. Osserviamo

$f(x) = \alpha x^4 - x = 0 \Leftrightarrow x(\alpha x^3 - 1) = 0$
 $x=0$ $x = \frac{1}{\sqrt[3]{\alpha}}$

$f'(x) = 4\alpha x^3 - 1$ $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt[3]{4\alpha}}$



ii)



□

Osserviamo che $f(1) = d-1$

Abbiamo garantito che $\frac{3}{x} = d x^4 - x$ allora una soluzione in $]0, 1[$ se $d-1 > 3$, ossia $d > 4$. $\square$

3) i) Vedi Es. 1. Allora $\min_{[4, \frac{3}{4}]} f(x) = 0$ $x=0$ pt. di minimo.

Poiché $\frac{3}{4} > \frac{\sqrt{2}}{2}$ allora $\max_{[-1, \frac{3}{4}]} f = f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{2}$ $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ pt. di massimo. $\square$

ii) Vedi Es. 1. Allora $\min_{[-3, 1]} f(x) = f(-3) = e^{-13}$ $x = -3$ pt. di minimo.

$\max_{[-3, 1]} f = \frac{1}{e}$, $x = -1, x = 1$ pt. di massimo. $\square$

$$4) i) 0.\overline{3} = \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \dots = \frac{3}{10} \left(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \dots \right) = \frac{3}{10} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{10} \right)^k =$$

$$= \frac{3}{10} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{3}{10} \cdot \frac{10}{9} = \boxed{\frac{1}{3}}$$

$$0.1\overline{53} = \frac{1}{10} + \frac{53}{10^3} + \frac{53}{10^5} + \dots = \frac{1}{10} + \frac{53}{10^3} \left[1 + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^4} + \dots \right] =$$

$$= \frac{1}{10} + \frac{53}{10^3} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{10^2} \right)^k = \frac{1}{10} + \frac{53}{10^3} \frac{1}{1 - \frac{1}{10^2}} = \frac{1}{10} + \frac{53}{10^3} \cdot \frac{10^2}{99} =$$

$$= \frac{1}{10} + \frac{53}{990} = \boxed{\frac{152}{990}}$$

$$ii) 1 + \frac{1}{d^4+3} + \frac{1}{(d^4+3)^2} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{d^4+3} \right)^k = \frac{1}{1 - \frac{1}{d^4+3}} = \boxed{\frac{d^4+3}{d^4+2}}$$

quindi: $\frac{1}{d^4+3} < \frac{1}{3}$

e la serie data è convergente $\square$

5) i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n^3+1}}$ diverge!

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n^3+1}} = 1$$

ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2+3}$ converge!

$$a_n = \frac{\sqrt{n}}{n^2+3} \sim b_n = \frac{1}{n^{3/2}} \text{ per } n \rightarrow +\infty.$$

iii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n - \sin n}{n(n+1)}$ diverge!

$$a_n = \frac{n - \sin n}{n(n+1)} \sim b_n = \frac{1}{n} \text{ per } n \rightarrow +\infty.$$

iv) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\arctan n}{2^n+3}$ converge!

$$a_n = \frac{\arctan n}{2^n+3} \sim b_n = \frac{\frac{\pi}{2}}{2^n} = \frac{\pi}{2^{n+2}} \text{ per } n \rightarrow +\infty$$

v) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n^2(n+1)}}$

$$a_n = \frac{1}{n^{1/2}(n+1)^{1/2}} \sim b_n = \frac{1}{n^{(d+1)/2}}$$

quindi è convergente $\Leftrightarrow \frac{d+1}{2} > 1$, ossia

$$\boxed{d > 1}$$

vi) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan \frac{1}{n}}{n^{2d}+1}$

$$a_n = \frac{\arctan \frac{1}{n}}{n^{2d}+1} = \frac{\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)}{n^{2d}+1} \text{ per } n \rightarrow +\infty$$

$$\text{quindi } a_n \sim b_n = \frac{1}{n^{2d+1}} \text{ per } n \rightarrow +\infty$$

quindi è convergente $\Leftrightarrow 2d+1 > 1$, ossia

$$\boxed{d > 0}$$

vii) $\sum_{k=0}^{\infty} (2d+3d^2)^k$

$$\text{converge} \Leftrightarrow |2d+3d^2| < 1$$

$$\Leftrightarrow -1 < 2d+3d^2 < 1 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 3d^2+2d+1 > 0 & \Rightarrow \forall d \in \mathbb{R} \\ 3d^2+2d-1 < 0 & \Rightarrow -1 < d < \frac{1}{3} \end{cases}$$

La serie data è quindi convergente se

$$\boxed{d \in]-1, \frac{1}{3}[}$$



ii) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$: notiamo che $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} =$

$$= \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$$

Quindi, la serie data non converge assolutamente, poiché

$$a_n \sim b_n = \frac{1}{2\sqrt{n}} \text{ per } n \rightarrow +\infty.$$

La serie converge però per il criterio di Leibniz, essendo

a segni alterni, $a_n \geq 0$, $a_n \searrow$ e $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right)}{n+3} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+3}$$

la serie non converge assolutamente, poiché $a_n = \frac{1}{n+3} \sim b_n = \frac{1}{n}$ per $n \rightarrow +\infty$

la serie converge per il criterio di Leibniz.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right)}{n^2+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+1}$$

la serie converge assolutamente, poiché $a_n = \frac{1}{n^2+1} \sim b_n = \frac{1}{n^2}$ per $n \rightarrow +\infty$.

quindi converge anche "semplicemente"

7) i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n} x^n$: serie di potenze; sia $a_n = \frac{1}{n2^n}$, allora $\sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{\sqrt[n]{n} 2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2}$

allora il raggio di convergenza della serie è $r=2$.

Oss. che per $x=2$, mi dà $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n} 2^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$.

Per $x=-2$, la serie diventa $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ che è convergente per il criterio di Leibniz.

L'insieme di convergenza della serie è quindi $E = [-2, 2[$.

ii) $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{n} - 1)^n x^n$: serie di potenze; sia $a_n = (\sqrt[n]{n} - 1)^n$; allora

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{n} - 1 \rightarrow 0 \text{ per } n \rightarrow +\infty.$$

allora il raggio di convergenza della serie è $r=+\infty$.

L'insieme di convergenza della serie è quindi $E = \mathbb{R}$.

iii) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-2} \frac{(2x)^n}{n}$: Poniamo $t=2x$ e la serie data diventa $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-2} \frac{t^n}{n}$. Abbiamo $a_n = \frac{(-1)^{n-2}}{n}$ e

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\frac{1}{n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1.$$

Se $t=1$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-2}}{n}$ è convergente per il criterio di Leibniz,

se $t=-1$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2n-2}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ è divergente. Quindi

L'insieme di convergenza della serie data è quindi $E = \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$

$$iv) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n!}{(4n+1)!} x^n ; \text{serie di potenze}; \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3(n+1)!}{(4n+5)!} \cdot \frac{(4n+1)!}{3n!}$$

$$= \frac{3(n+1) \cdot (4n+1)!}{(4n+5)(4n+4)(4n+3)(4n+2)(4n+1)!} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Quindi il raggio di convergenza di tale serie è $r=+\infty$. L'insieme di convergenza della serie data è $\boxed{E=\mathbb{R}}$. $\square$

$$v) \sum_{n=1}^{\infty} n(x-2)^n : \text{serie di potenze}; \text{poniamo } t=x-2 \text{ e mi ha } \sum_{n=1}^{\infty} n t^n ;$$

abbiamo che $\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$ e quindi la serie $\sum_{n=1}^{\infty} n t^n$ ha raggio di convergenza $r=1$.

Se $t=1$, la serie diventa $\sum_{n=1}^{\infty} n$, che diverge poiché $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \neq 0$ e la serie è a termini positivi. Infine

se $t=-1$, abbiamo $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n$ che non è convergente, poiché $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-1)^n n$ non converge a 0.

In conclusione, poiché $t=x-2$ otteniamo che la serie data è convergente solo per $|x-2| < 1$, e quindi l'insieme di convergenza è dato da $\boxed{E =]1, 3[}$. $\square$

$$vi) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+3}{3n^2+4} (x-3)^n : \text{serie di potenze}; \text{poniamo } t=x-3 \text{ e mi ha } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+3}{3n^2+4} t^n ;$$

Abbiamo che $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)+3}{3(n+1)^2+4} \cdot \frac{3n^2+4}{n+3} = \frac{n+4}{3n^2+6n+7} \cdot \frac{3n^2+4}{n+3} (*)$

$\rightarrow 1$ e quindi la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+3}{3n^2+4} t^n$ ha raggio di convergenza $r=1$.

Se $t=1$, la serie diventa $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+3}{3n^2+4}$ che diverge poiché

$$\frac{n+3}{3n^2+4} \sim \frac{1}{3n} \text{ per } n \rightarrow +\infty.$$

Se $t=-1$, la serie diventa $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+3}{3n^2+4} (-1)^n$. Ora $a_n = \frac{n+3}{3n^2+4}$ soddisfa $a_n \geq 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$ e $a_n \searrow$

(infatti $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3n^3+12n^2+4n+16}{3n^3+15n^2+25n+21} < 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$, quindi $a_{n+1} < a_n$ $\forall n$) $(*)$

Quindi per il criterio di Leibniz la serie converge per $t = -1$.

Ritornando alla serie di partenza, possiamo dire che essa converge per $x \in \boxed{E = [2, 4[}$. (avendo $t = x - 3$ e $-1 \leq t < 1$) $\square$

vii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{2n+1} (2 - \log x)^n$: Poniamo $t = 2 - \log x$ e $x > 0$.

Abbiamo allora $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{2n+1} t^n$. Ovviamente $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+2}{2n+3} \cdot \frac{2n+1}{n+1}$

$\rightarrow 1$ e quindi il raggio di convergenza della serie di potenze $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{2n+1} t^n$ è $r = 1$. Notiamo che

se $t = 1$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{2n+1}$ non converge poiché $\frac{n+1}{2n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2}$
 se $t = -1$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{2n+1} (-1)^n$ non converge, poiché $\frac{n+1}{2n+1} \not\rightarrow 0$

$\frac{n+1}{2n+1} (-1)^n \not\rightarrow 0$. Quindi, ricordando che $t = 2 - \log x$, $x > 0$

si deve chiedere $\begin{cases} -1 < 2 - \log x < 1 \\ x > 0 \end{cases}$. Abbiamo

$$\begin{cases} x > 0 \\ 3 > \log x > 1 \end{cases}$$

e quindi l'insieme di convergenza è

$$\text{dato da } \boxed{E =]e, e^3[}.$$

$\square$

viii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{3^n+1} x^n$ serie di potenze; abbiamo $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^2+1}{3^{n+1}+1} \cdot \frac{3^n+1}{n^2+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3}$

e quindi il raggio di convergenza è $r = 3$. Notiamo che

per $x = 3$ abbiamo $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{3^n+1} \cdot 3^n$. Poiché $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n^2+1)3^n}{3^n+1} \rightarrow +\infty$,

la serie diverge in $x = 3$.

Se $x = -3$, abbiamo $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{3^n+1} \cdot 3^n (-1)^n$. Anche in questo caso

la serie non converge, poiché il termine generale della serie

$\frac{n^2+1}{3^n+1} \cdot 3^n (-1)^n$ non converge. L'insieme di convergenza della

serie è dunque $\boxed{E =]-3, 3[}$.

$\square$

ix) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left(\frac{x+1}{x-1} \right)^n$: poniamo $t = \frac{x+1}{x-1}$ $x \neq 1$.

Abbiamo allora la serie di potenze $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} t^n$ che risulta convergente $t \in [-1, 1]$ (poiché il raggio di convergenza è $r_t = 1$; inoltre per $t=1$ la serie diventa $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ che è convergente; quindi la serie è assolutamente convergente su $[-1, 1]$, e quindi converg. su $[-1, 1]$. Allora la n.s. serie di potenze è quindi convergente per $\left| \frac{x+1}{x-1} \right| \leq 1 \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} \frac{x+1}{x-1} + 1 \geq 0 \\ \frac{x+1}{x-1} - 1 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2x}{x-1} \geq 0 \\ \frac{2}{x-1} \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0 \text{ o } x > 1 \\ x < 1 \end{cases}$$

L'insieme di convergenza è quindi dato da $E =]-\infty, 0] \cup [1, \infty[$ $\square$

x) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + n}{4^n + 1} \left(\frac{x+2}{x^2 - 2x + 3} \right)^n$: poniamo $t = \frac{x+2}{x^2 - 2x + 3}$. Abbiamo allora

la serie di potenze $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 1}{4^n + 1} t^n$ e il raggio di convergenza di tale serie è $r=2$, poiché $\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{2^n + 1}{4^n + 1}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

Notiamo che per

$t=2$ risulta $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 1}{4^n + 1} \cdot 2^n$ che diverge, poiché non converge essendo $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n + 1}{4^n + 1} \cdot 2^n = 1 \neq 0$.

Se $t=-2$, risulta $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n + 2^n}{4^n + 1} (-1)^n$ che non è convergente, poiché $\frac{4^n + 2^n}{4^n + 1} (-1)^n$ non converge.

Allora la serie data converge per gli $x \in \mathbb{R}$ t.c.

$$\left| \frac{x+2}{x^2 - 2x + 3} \right| < 2 \quad \text{ossia} \quad \begin{cases} \frac{x+2}{x^2 - 2x + 3} + 2 > 0 \\ \frac{x+2}{x^2 - 2x + 3} - 2 < 0. \end{cases}$$

Abbiamo $\begin{cases} \frac{2x^2 - 3x + 8}{x^2 - 2x + 3} > 0 \\ \frac{-2x^2 + 5x - 4}{x^2 - 2x + 3} < 0 \end{cases}$ che si riduce a $\begin{cases} 2x^2 - 3x + 8 > 0 \\ 2x^2 - 5x + 4 > 0 \end{cases}$ che sono sempre vere.

Quindi $E = \mathbb{R}$ l'insieme di convergenza. $\blacksquare$

8) La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^d + n^{-d}}$ risulta convergente per $d \in]-\infty, -3[\cup]3, +\infty[$

Infatti, se $d=0$ $\frac{n^2}{n^d + n^{-d}} = \frac{n^2}{2}$ e la serie diverge positivamente.

se $d > 0$, $\frac{n^2}{n^d + n^{-d}} \sim \frac{1}{n^{d-2}}$ per $n \rightarrow +\infty$ e risulta

quindi convergente se $d-2 > 1$, ossia $d > 3$

se $d < 0$, $\frac{n^2}{n^d + n^{-d}} \sim \frac{1}{n^{-d-2}}$ per $n \rightarrow +\infty$ e risulta

quindi convergente se e solo se $-d-2 > 1$,

ossia $d < -3$. ■

g) i) (V) Poiché $\log(1+a_n^2) \sim a_n^2$ per $n \rightarrow +\infty$.

(Nota: $\sum_{n=0}^{\infty} \log(1+a_n^2) < +\infty \Rightarrow \log(1+a_n^2) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \Rightarrow a_n^2 \rightarrow 0$).

ii) (F) Infatti, sia $a_n = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$ allora $\sum_{n=0}^{\infty} \log(1+\frac{1}{n^2}) < +\infty$.

D'altra parte $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ non è convergente.

iii) (F) Essendo $\log(1+a_n^2) \sim a_n^2$ per $n \rightarrow +\infty$ le due serie $\sum_{n=0}^{\infty} \log(1+a_n^2)$, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2$ hanno lo stesso carattere.

iv) (F) Basta considerare $a_n = -\frac{1}{n}$. Allora $\sum_{n=0}^{\infty} \log(1+\frac{1}{n^2}) < +\infty$,
ma $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{1}{a_n}} = \sum_{n=0}^{\infty} e^n = +\infty$.

(Poiché $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^n = +\infty$, non è soddisfatta la condizione necessaria affinché una serie converga). ■