

ESERCIZI VARI (per coloro che si divertono a mettere le mani in pasta)

Esercizio 1:

Sia $X = \mathcal{C}^1([a, b])$. Determinate la variazione prima $\delta F(u, v)$ per $u, v \in X$ se

a) $F(u) = \int_a^b \sqrt{2 + x^2 - \sin u'(x)} dx;$

b) $F(u) = \int_a^b [x^2 u^2(x) + e^{u'(x)}] dx.$

Esercizio 2:

Sia $X = \mathcal{C}^0([a, b])$ e sia $F(u) = \int_a^b [\sin^3 x + u^2(x)] dx$ definito su X . Provate che

$$F(u + v) \geq F(u) + \delta F(u, v) \quad \forall u, v \in X$$

con l'uguaglianza se e solo se $v = 0$.

Esercizio 3:

Sia $h \in \mathcal{C}^0([a, b])$ tale che

$$\int_a^b h(x)u(x) dx = 0 \quad \forall u \in X_0 = \{u \in \mathcal{C}^0([a, b]) : \int_a^b u(x) dx = 0\}.$$

Provate che $h(x) = c$ (costante) su $[a, b]$ (Sugg.: applicate opportunamente il lemma di Du Bois-Reymond).

Esercizio 4:

a) Date $\rho, \beta \in X = \mathcal{C}^0([0, b])$ con $\rho > 0$, trovate una funzione $u_0 \in X$ che minimizzi la funzione

$$F(u) = \int_0^b [\rho(x)u^2(x) + \beta(x)u(x)] dx \quad \text{su } X.$$

b) Provate che u_0 è unica.

c) Provate che $\inf_{u \in X} F(u) = -\infty$ se $\rho < 0$.

Esercizio 5:

Per ciascuno dei seguenti problemi, verificate che il funzionale è strettamente convessa su X e determinate l'unica funzione minimizzante per F su X :

a) $F(u) = \int_0^1 [2e^x u(x) + u'(x)^2] dx \quad X = \{u \in \mathcal{C}^1([0, 1]) : u(0) = 0, u(1) = 1\};$

b) $F(u) = \int_1^2 [2u^2(x) + x^2 u'(x)^2] dx \quad X = \{u \in \mathcal{C}^1([1, 2]) : u(1) = 1, u(2) = 5\}$ (Sugg. : L'equazione differenziale ha due soluzioni linearmente indipendenti della forma x^p , $p \in \mathbb{R}$);

c) $F(u) = \int_0^{1/2} [u(x) + \sqrt{1 + u'(x)^2}] dx \quad X = \{u \in \mathcal{C}^1([0, \frac{1}{2}]) : u(0) = -1, u(\frac{1}{2}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}\};$

d) $F(u) = \int_1^8 [u'(x)^2 - 4u(x)] dx \quad X = \{u \in \mathcal{C}^1([1, 8]) : u(1) = 2, u(8) = -\frac{37}{4}\}.$

e) $F(u) = \int_1^8 [u'(x)^4 - 4u(x)] dx \quad X = \{u \in \mathcal{C}^1([1, 8]) : u(1) = 2, u(8) = -\frac{37}{4}\}.$

Esercizio 6:

- a) Provate che per ogni $x \in [1, 2]$ fissato, la funzione $(u, \xi) \mapsto f(x, u, \xi) = x\xi + u$ è convessa, ma non strettamente convessa su $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.
b) Trovate più di una funzione che minimizzi il funzionale

$$F(u) = \int_1^2 [xu'(x) + u(x)] dx \quad \text{su } X = \{u \in \mathcal{C}^1([1, 2]) : u(1) = 1, u(2) = 2\}?$$

Esercizio 7:

Usando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange determinate l'eventuale funzione minimizzante per F su X_G :

- a) $F(u) = \int_0^1 u'(x)^2 dx \quad X_G = \{u \in \mathcal{C}^1([0, 1]) : u(0) = 0, u(1) = 1, G(u) = \int_0^1 xu'(x) dx = 1\};$
b) $F(u) = \int_0^K u^2(x) dx \quad X_G = \{u \in \mathcal{C}^1([0, K]) : u \geq 0, G(u) = \int_0^K (K - x)u(x) dx = m\},$ dove K e m sono costanti positive assegnate.

Esercizio 8:

Sia $F(u) = \int_0^b \sqrt{\cos^2 u(x) + u'(x)^2} dx$ e sia $X = \{u \in \mathcal{C}^1([0, b]) : u(0) = 0, u(b) = 0\}$ con $b > 0$ assegnata.

- a) Provate che $u_0(x) \equiv 0$ su $[0, b]$
i) è un estremale di F su X ;
ii) soddisfa la condizione necessaria di Legendre stretta per minimizzanti relativi deboli di F su X .
b) Scrivete l'integrale accessorio $Q(v)$ rispetto ad f e u_0 (i.e. $2Q(v) = \delta^2 F(0, v)$ per ogni $v \in X$). Determinate l'equazione (accessoria) di Jacobi e la funzione di Jacobi $\Delta(x, 0)$.
c) Usando la teoria dei campi di Jacobi (punti coniugati) discutete la natura dell'estremale u_0 su $[0, b]$ se $b < \pi$ oppure se $b > \pi$.

Esercizio 9:

Sia $F(u) = \int_0^2 [u'(x)^2 - u^2(x)u'(x)^4] dx$ e sia $X^a = \{u \in \mathcal{C}^1([0, 2]) : u(0) = u(2) = a\}$ con $a \in \mathbb{R}$.

- a) Verificate che per ogni $a \in \mathbb{R}$ la funzione costante $u_a(x) \equiv a$ è un estremale per F su X^a .
b) Discutete per quali $a \in \mathbb{R}$ la funzione u_a soddisfa la condizione necessaria di Weierstrass per minimizzanti relativi forti per F su X^a .
c) Discutete per quali $a \in \mathbb{R}$ la funzione u_a soddisfa la condizione necessaria di Legendre per minimizzanti relativi deboli per F su X^a .

Esercizio 10:

Usando la teoria dei campi di Weierstrass provate che $u_0(x) = kx$ minimizza $F(u) = \int_0^1 \sqrt{1 + u'(x)^2} dx$ su $X = \{u \in \mathcal{C}^1([0, 1]) : u(0) = 0, u(1) = k\}$ con $k \in \mathbb{R}$. Quale problema state risolvendo?

Esercizio 11:

- a) Usando la teoria dei campi di Weierstrass provate che $u_0(x) \equiv 0$ è un minimizzante assoluto (stretto) per il funzionale $F(u) = \int_0^b [u'(x)^2 + 2u(x)u'(x) - 16u^2(x)] dx$ su $X = \{u \in \mathcal{C}^1([0, b]) : u(0) = 0, u(b) = 0\}$ se $0 < b < \frac{\pi}{4}$.
b) Provate che F non ammette minimo su X se $b > \frac{\pi}{4}$.