Università degli Studi di Trento - Facoltà di Scienze MM.FF.NN
Corso di Laurea in Matematica
Corso di Calcolo delle Variazioni - a.a. 2013/14 (periodo 17/02/14-06/06/14)
docente: Prof. Anneliese Defranceschi
e-mail: anneliese.defranceschi@unitn.it
homepage: http://latemar.science.unitn.it/defranceschi

Lezioni: martedì 14-15, venerdì 9-11, 13-14

18/02/14 (1 ora):

Introduzione al corso: orario, indirizzo e-mail, programma (in linea di massima). Ottimizzazione in $\mathbb{R}$ (in $\mathbb{R}^n$) (teorema di Weierstrass, punti estremi, punti critici, cond. necessari e sufficienti affinchè un punto critico sia estremante).

21/02/14 (2 ore):

Ottimizzazione in $\mathbb{R}$ (in $\mathbb{R}^n$) (convessità, variazione prima e seconda). Brevi cenni storici. Esempi di modellizzazione mediante funzionali integrali (curva di minima lunghezza, brachistocrona, superficie di rivoluzione di area minima). Integrali variazionali (integrando variazionale, funzione di Lagrange o lagrangiana).
Nota sulla non-esistenza di minimi: $F(u) = \int_{-1}^{1} x^2(u'(x))^2\,dx$ in $X = \{u \in \mathcal{C}^1([-1,1]) : u(-1) = -1, u(1) = 1\}$ (esempio di Weierstrass) (accennato).

25/02/14 (1 ora):

Esempio di Weierstrass. Non-esistenza del minimo (e del massimo): $F(u) = \int_0^1 \frac{1}{1+(u'(x))^2}\,dx$ in $X = \{u \in \mathcal{C}^1([0,1]) : u(0) = 0, u(1) = 1\}$.
Variazione prima e variazione seconda per $F : X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq V$ con V spazio vettoriale su $\mathbb{R}$.

28/02/14 (2 ore):

Variazione prima e variazione seconda per $F : X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq V$ con V spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ e punti di minimo.
Calcolo della variazione prima per alcuni funzionali integrali. Lemma fondamentale del Calcolo delle Variazioni.
Metodi indiretti (classici). Equazione di Eulero-Lagrange in forma debole (EED). Estremale debole di F. Equazione di Eulero-Lagrange (EE). Estremale di F.
(Non-) Regolarità di estremali deb. e minimizzanti: $F(u) = \int_{-1}^{1}(u(x))^2[2x - u'(x)]^2\,dx$ in $X = \{u \in \mathcal{C}^1([-1,1]) : u(-1) = 0, u(1) = 1\}$.

28/02/14 (1 ora):

Non-esistenza di un minimizzante: $F(u) = \int_0^1[(u'(x))^2 - 1]^2\,dx$ in $X = \{u \in \mathcal{C}^1([0,1]) : u(0) = 0, u(1) = 0\}$ (paradosso di Eulero). Il minimo esiste nella classe delle funzioni $\mathcal{C}^1$-a tratti.
Equazione di Eulero-Lagrange per $F(u) = \int_0^1[(u'(x))^2 - 1]^2\,dx$. Esistenza di un estremale di F in $X = \{u \in \mathcal{C}^1([0,1]) : u(0) = 0, u(1) = 0\}$ che non è minimo.
Funzioni convesse. La convessità della funzione lagrangiana come condizione sufficiente affinchè un estremale di F sia un punto di minimo. Stretta convessità ed unicità degli eventuali minimi.

07/03/14 (2 ore):

L'equazione di Eulero-Lagrange $(EE)'$. Se f non dipende esplicitamente da x, allora $\Phi(u,\xi) := f(u,\xi) - \xi f_\xi(u,\xi)$ è un integrale primo del funzionale F.
L'equazione di Eulero-Lagrange (EE) *e gli estremali (e loro natura) di* F :
Caso 1): $f(x,u,\xi) = f(\xi)$.
1.a) f convessa. Disuguaglianza di Jensen e un suo corollario (Applicazione: Curva di minima lunghezza - caso non-parametrico).

1.b) f non convessa (Paradosso di Eulero; $F(u) = \int_0^1 e^{-(u'(x))^2}\,dx$ su $X = \{u \in \mathcal{C}^1([0,1]) : u(0) = 0, u(1) = 0\}$).
Caso 2): $f(x,u,\xi) = f(x,\xi)$ (es. di Weierstrass)
Caso 3): $f(x,u,\xi) = f(u,\xi)$
Equivalenza tra (EE) e l'integrale primo $\Phi(u,\xi) := f(u,\xi) - \xi f_\xi(u,\xi)$ per F per soluzioni non constanti.
3.a) f convessa ($F(u) = \int_{-1}^1 [\frac{k}{2}(u'(x))^2 + gu(x)]\,dx$ su $X = \{u \in \mathcal{C}^1([-1,1]) : u(-1) = 0, u(1) = 0\}$; corda elastica).

07/03/14 (1 ora):
Commenti sulla stretta convessità della lagrangiana e l'unicità del minimo per il problema variazionale. $F(x) = \int_{t_1}^{t_2} [\frac{m}{2}|x'(t)|^2 - V(x(t))]\,dt$; l'integrale primo di F e la conservazione dell'energia totale.
3.b) f non convessa ($F_\lambda(u) = \int_0^\pi [(u'(x))^2 - \lambda^2 (u(x))^2]\,dx$ su $X = \{u \in \mathcal{C}^1([0,\pi]) : u(0) = 0, u(\pi) = 0\}$ al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$).

11/03/14 (1 ora):
Conclusione dell'esempio discusso sopra. Disuguaglianza di Poincarè-Wirtinger (enunciato).
Serie di Fourier: definizione; coefficienti di Fourier; esempio.

14/03/14 (2 ore):
Convergenze per le serie di Fourier (in media quadratica; puntuale, uniforme). Disuguaglianza di Bessel. Identità di Parseval. Disuguaglianza di Poincarè-Wirtinger.

14/03/14 (1 ora):
Studio del problema della brachistocrona: non-convessità della funzione lagrangiana; l'integrale primo legato al funzionale $T(u)$; il minimo (espresso in forma parametrica) è un arco di cicloide.

18/03/14 (1 ora):
Tempo minimo di percorrenza. Confronto con il tempo di percorrenza lungo una retta. Ancora qualche osservazione sulla brachistocrona: confronto con il tempo di percorrenza lungo una semicirconferenza. Tautocronia della cicloide (solo accennato).
Studio del problema delle superfici di rivoluzione di area minima.

21/03/14 (2 ore):
Studio del problema delle superfici di rivoluzione di area minima.: funzioni iperboliche; l'integrale primo legato al funzionale $S(u)$; catenaria, catenoide. Esistenza o non di estremali soddisfacenti le condizioni al contorno.
Caso 4): $f = f(x,u,\xi)$
($F(u) = \int_0^1 [\frac{1}{2}(u'(x))^2 + g(x)u(x)]\,dx$ su $X = \{u \in \mathcal{C}^1([0,1]) : u(0) = 0, u(1) = 0\}$; g continua assegnata).

Problemi variazionali con vincolo isoperimetrico: Teorema dei moltiplicatori di Lagrange. Il caso convesso.

21/03/14 (1 ora):
Applicazione del teorema dei moltiplicatori di Lagrange a $F(u) = \int_0^1 (u'(x))^2\,dx$ su $X = \{u \in \mathcal{C}^1([0,1]) : u(0) = u(1) = 0\}$ con il vincolo isoperimetrico $G(u) = \int_0^1 u(x)\,dx = 1$.
Il problema della catenaria (il problema del filo pesante).

25/03/14 (1 ora):
Conclusione della dimostrazione del problema del filo pesante. Il problema di Didone usando i moltiplicatori di Lagrange (impostato).

28/03/14 (2 ore):
Il problema di Didone usando i moltiplicatori di Lagrange. Il problema di Didone usando il teorema di Green nel piano e la disuguaglianza di Poincarè-Wirtinger (il caso generale).

01/04/14 (2 ore):

Il lemma di du Bois-Reymond e suo corollario. L'equazione di Eulero-Lagrange per f e u di classe $\mathcal{C}^1$. L'equazione di Eulero-Lagrange in forma integrale.
Estremali spezzati: l'equazione di Eulero-Lagrange in forma integrale e le condizioni di Erdmann (senza dim.).

04/04/14 (2 ora):

Applicazioni ($F(u) = \int_0^1 [(u'(x))^2 - 1]\,dx$ su $Y = \{u \in \mathcal{C}^1_{\mathrm{tratti}}([0,1]) : u(0) = u(1) = 0\}$ e su $Y^\beta = \{u \in \mathcal{C}^1_{\mathrm{tratti}}([0,1]) : u(0) = 0, u(1) = \beta\}$;
$F(u) = \int_{-1}^1 (u(x))^2(1 - u'(x))^2\,dx$ su $Y = \{u \in \mathcal{C}^1_{\mathrm{tratti}}([-1,1]) : u(-1) = 0, u(1) = 1\}$ e su $Y^{\alpha,\beta} = \{u \in \mathcal{C}^1_{\mathrm{tratti}}([-1,1]) : u(-1) = \alpha, u(1) = \beta\}$.
Minimi relativi deboli e forti (stretti). Ovviamente ogni punto di minimo relativo forte è un punto di minimo relativo debole. Non vale il viceversa: la funzione identicamente nulla su $[0,1]$ è un punto di minimo relativo debole, ma non forte, per $F(u) = \int_0^1 [(u'(x))^2 - (u'(x))^4]\,dx$ su $X = \{u \in \mathcal{C}^1([0,1]) : u(0) = u(1) = 0\}$.
Analogamente per il funzionale di Scheeffer: $F(u) = \int_0^1 [(u'(x))^2 + (u'(x))^3]\,dx$ su $X = \{u \in \mathcal{C}^1([0,1]) : u(0) = u(1) = 0\}$.

04/04/14 (1 ora):

La variazione seconda e condizioni sufficienti (coercitività) affinchè un estremale debole di F sia un punto di minimo relativo debole. La condizione di positività della variazione seconda non è sufficiente affinchè un estremale debole di F sia un punto di minimo relativo debole: esempio di Scheeffer ($F(u) = \int_{-1}^1 [x^2(u'(x))^2 + x(u'(x))^3]\,dx$ su $X = \{u \in \mathcal{C}^1([-1,1]) : u(-1) = u(1) = 0\}$).
La coercività della variazione seconda non è sufficiente affinchè un estremale debole di F sia un punto di minimo relativo forte (esempio di Scheeffer: $F(u) = \int_0^1 [(u'(x))^2 + (u'(x))^3]\,dx$ su $X = \{u \in \mathcal{C}^1([0,1]) : u(0) = u(1) = 0\}$).

08/04/14 (1 ora):

Dimostrazione della sufficienza della coercitività affinchè un estremale debole di F sia un punto di minimo relativo debole.
Lagrangiana accessoria e integrale accessorio.
Condizione necessaria di Legendre per minimi relativi deboli (solo enunciato).

11/04/14 (2 ore):

Condizione necessaria di Legendre per minimi relativi deboli (dim.). Applicazione agli estremali del funzionale $F(u) = \int_0^1 [3(u'(x))^4 - 20(u'(x))^3 + 36(u'(x))^2]\,dx$ su $X = \{u \in \mathcal{C}^1([0,1]) : u(0) = 0, u(1) = 1\}$).
Funzione di eccesso di Weierstrass. Condizione necessaria di Weierstrass per minimi relativi forti (senza dim.). Applicazione a $F(u) = \int_0^1 [(u'(x))^2 + (u'(x))^3]\,dx$ su $X = \{u \in \mathcal{C}^1([0,1]) : u(0) = u(1) = 0\}$.
Introduzione alla teoria di Jacobi per minimi relativi deboli. Equazione di Jacobi. Campi di Jacobi. Lemma di Legendre.

11/04/14 (1 ora):

Lemma di Jacobi. Condizioni sufficienti per minimi relativi deboli e campi di Jacobi. Condizione necessaria di Jacobi.

15/04/14 (1 ora):

Funzione di Jacobi. Punti coniugati. Condizioni sufficienti per minimi relativi deboli e punti coniugati (senza dim.).
Studio della natura dell'estremale $u_0 \equiv 0$ di $F(u) = \int_0^b [(u'(x))^2 - (u(x))^2]\,dx$ su $X = \{u \in \mathcal{C}^1([0,b]) : u(0) = u(b) = 0\}$, al variare di $b > 0$.

30/04/14 (2 ore):

Introduzione alla teoria dei campi di Weierstrass per minimi relativi forti. Campo di estremali (rispetto alla lagrangiana f) e funzione pendenza.
Campo di estremali e funzione pendenza: casi $f(x,u,\xi) = f(\xi)$ e $f(x,u,\xi) = \xi^2 - u^2$.
Equazione di Eulero (modificata) per il campo. Equazioni di Caratheodory. Integrale invariante di Hilbert (rispetto ad f).
Condizioni sufficienti affinchè un estremale immerso in un campo di estremali sia un punto di minimo assoluto (mediante la funzione eccesso di Weierstrass) (senza dim.); condizioni sufficienti affinchè un estremale immerso in un campo di estremali sia un punto di minimo relativo debole (risp. forte) (mediante la condizione di Legendre stretta (risp. forte)) (senza dim.).
Condizioni sufficienti affinchè un estremale sia un punto di minimo relativo forte mediante i punti coniugati e la teoria dei campi di estremali (senza dim.).

30/04/14 (1 ora):
Applicazione a $F(u) = \int_0^1 u(x)(u'(x))^2\,dx$ su $X = \{u \in \mathcal{C}^1([0,1]) : u(0) = u(1) = 1\}$. Studio della natura dell'estremale $u_0(x) \equiv 1$. Dimostrazione che $F(u) = \int_0^1 u(x)(u'(x))^2\,dx$ non ammette minimo assoluto su $X = \{u \in \mathcal{C}^1([0,1]) : u(0) = u(1) = 1\}$.
Studio della natura dell'estremale $u_0 \equiv 0$ di $F(u) = \int_0^1 [(u'(x))^2 - (u(x))^2]\,dx$ su $X = \{u \in \mathcal{C}^1([0,1]) : u(0) = u(1) = 0\}$.
Studio della natura dell'estremale $u_0(x) = kx$ di $F(u) = \int_0^1 [(u'(x))^2 - 1]^2\,dx$ su $X = \{u \in \mathcal{C}^1([0,1]) : u(0) = 0, u(1) = k\}$ al variare di $k \in \mathbb{R}$ (solo impostato).

06/05/14 (1 ora):
Studio della natura dell'estremale $u_0(x) = kx$ di $F(u) = \int_0^1 [(u'(x))^2 - 1]^2\,dx$ su $X = \{u \in \mathcal{C}^1([0,1]) : u(0) = 0, u(1) = k\}$ al variare di $k \in \mathbb{R}$.
Metodi diretti. Introduzione. Teorema di Weierstrass: cenno sulla dimostrazione e commenti sul ruolo della compattezza dei sottolivelli della funzione e della continuità della funzione nella dimostrazione (Successione minimizzante).

09/05/14 (2 ore):
Funzione semicontinua inferiormente e sottolivelli chiusi. Funzione coerciva. Teorema di Tonelli (generalizzazione del teorema di Weierstrass): esistenza del minimo.
Unicità del punto di minimo.

09/05/14 (1 ora):
Applicazione del quadro teorico generale del metodo diretto ad un funzionale integrale dipendente solo dalla funzione u: $F(u) = \int_0^1 [(u(x))^2 - 2g(x)u(x)]\,dx$ su $X = L^2(0,1)$.

13/05/14 (1 ora):
Teorema di Ascoli-Arzelà. Tentativo di applicazione del quadro teorico generale del metodo diretto ad un funzionale integrale dipendente dalla funzione u e dalla derivata u' : $F(u) = \int_a^b [(u'(x))^2 + g(x)u(x)]\,dx$ su $X = C_0^1([a,b])$ con dati nulli al bordo.

16/05/14 (2 ore):
Funzioni assolutamente continue $AC([a,b])$: definizioni a confronto e alcune proprietà. Un risultato di esistenza di un minimo per $F(u) = \int_a^b [f(u'(x)) + g(x)u(x)]\,dx$ su $X = H_0^1(a,b)$.

16/05/14 (1 ora):
Funzioni hlderiane $\mathcal{C}^{0,\alpha}$. Si osserva che $H^1(a,b) \subset \mathcal{C}^{0,\alpha}$. La funzione $u(x) = \sqrt{x}$ definita su $[0,1]$ è assolutamente continua su $[0,1]$, è hlderiana con esponente di Hlder $\alpha \leq 1/2$ ma non è lipschitziana.
Derivata debole. Spazio di Sobolev $W^{1,p}(a,b)$.
A quante segue è stato fatto solo un cenno: Confronto tra le classi di funzioni $AC([a,b])$ e $W^{1,1}(a,b)$. Teorema di compattezza debole in $W^{1,p}(a,b)$, per $1 < p < +\infty$. Teorema di semicontinuità di Tonelli. Teorema di esistenza di Tonelli. Applicazione al funzionale di Weierstrass $F(u) = \int_{-1}^1 x^2(u'(x))^2\,dx$ in $X = \{u \in W^{1,2}(-1,1) : u(-1) = -1, u(1) = 1\}$.