

COGNOME _____

NOME _____

MATRICOLA

--	--	--	--	--	--

NON SCRIVERE QUI

A

1	2	3	4	5	6
---	---	---	---	---	---

UNIVERSITÀ DI TRENTO — DIP. DI PSICOLOGIA E SCIENZE COGNITIVE

CDL IN SCIENZE E TECNICHE DI PSICOLOGIA COGNITIVA

ESAME SCRITTO DI ANALISI MATEMATICA

A.A. 2015-2016 — ROVERETO, 7 GIUGNO 2016

Riempite immediatamente questo foglio scrivendo in stampatello cognome, nome e numero di matricola. Scrivete cognome e nome (in stampatello) su ogni foglio a quadretti. Il tempo massimo per svolgere la prova è di **DUE ORE E MEZZA**.

È obbligatorio consegnare sia il testo, sia tutti i fogli ricevuti; al momento della consegna, inserite tutti gli altri fogli, compreso quello con il testo, dentro uno dei fogli a quadretti.

Potete usare solo il vostro materiale di scrittura e il vostro materiale di studio. Non usate il colore rosso.

1) Siano dati gli insiemi

$$A = \{x \in \mathbb{R} : \frac{|x^2 - 1| - 3}{|x| + 2} < 0\}; \quad B = \{x \in \mathbb{R} : \log_2(x - 1) \leq 1\}.$$

i) Determinate A e B e rappresentateli sulla retta reale.

ii) Determinate gli insiemi $A \cup B$, $A \cap B$ e $A \setminus B$.

iii) Dite se A e B sono insiemi limitati. Determinate, se esistono, il minimo e il massimo di B .

2) Siano $f : [-1, 3] \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ le funzioni definite da

$$f(x) = \begin{cases} 3\sqrt[3]{x} & \text{se } -1 \leq x \leq 0 \\ 2\log_3(x+1) & \text{se } 0 < x < 2 \\ x & \text{se } 2 \leq x \leq 3 \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x < 0 \\ -1 & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$$

i) Rappresentate graficamente f e g .

ii) Determinate l'immagine di f . Rappresentate graficamente la funzione inversa $f^{-1} : f([-1, 3]) \rightarrow \mathbb{R}$.

iii) Determinate, nei loro domini, le espressioni delle funzioni $(f \circ g)(x)$ e $(g \circ f)(x)$.

iv) Determinate un insieme $A \subset \mathbb{R}$ tale che $g : A \rightarrow \mathbb{R}$ risulti una funzione iniettiva. Tale A è unico?

3) i) Calcolate, al variare di $k \in \{1, 2, 3\}$, il seguente limite: $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2^x - x^k}{3 + x^2 + \log|x|}$.

ii) Calcolate i limiti $\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{e^x}{x^2 - 1}$ e $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{e^x}{x^2 - 1}$.

iii) Calcolate $\sum_{k=1}^3 f^{(k)}(1)$, dove $f(x) = \log(2x+1)$ e $f^{(1)}(x)$ denota la derivata (prima) di f , $f^{(2)}(x)$ denota la derivata (seconda) di f , e così via.

- 4) i) Rappresentate graficamente nel piano cartesiano l'insieme A delle coppie $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tali che

$$\begin{cases} x^2 + 4y^2 - 4x - 8y + 4 > 0 \\ y \geq \frac{1}{2}|x| \\ x + 1 \geq 0. \end{cases}$$

- ii) Dite se le seguenti affermazioni sono vere o se sono false (motivando le risposte):

- a) $\forall (x, y) \in A, x > -1$.
- b) $\exists (x, y) \in A : xy = 0$.
- c) $\forall x \geq -1, \exists y < 0 : (x, y) \in A$.

-
- 5) i) Studiate (insieme di definizione, segno, comportamento agli estremi dell'insieme di definizione, asintoti, derivabilità, punti critici e monotonia) la funzione definita da

$$f(x) = \frac{x-1}{x^2-x-2}$$

e rappresentatela graficamente nel piano cartesiano.

- ii) Verificate che $f(x) = \frac{1}{3(x-2)} + \frac{2}{3(x+1)}$ per ogni $x \in \text{dom} f$.
- iii) Determinate l'equazione della retta r tangente al grafico di f nel punto di coordinata $x = 3$.
- iv) Determinate l'area della regione piana E delimitata dal grafico di f , dalla retta r individuata nel punto iii), e dalla retta di equazione $x = 5$.

-
- 6) Il direttore di un istituto di ricerca ha a disposizione 8 ricercatrici e 12 ricercatori per fare una commissione di 3 donne e 4 uomini. Quante diverse commissioni può formare il direttore?
-

COGNOME _____

NOME _____

MATRICOLA

--	--	--	--	--	--

NON SCRIVERE QUI

B

1	2	3	4	5	6
---	---	---	---	---	---

UNIVERSITÀ DI TRENTO — DIP. DI PSICOLOGIA E SCIENZE COGNITIVE

CdL IN SCIENZE E TECNICHE DI PSICOLOGIA COGNITIVA

ESAME SCRITTO DI ANALISI MATEMATICA

A.A. 2015-2016 — ROVERETO, 7 GIUGNO 2016

Riempite immediatamente questo foglio scrivendo in stampatello cognome, nome e numero di matricola. Scrivete cognome e nome (in stampatello) su ogni foglio a quadretti. Il tempo massimo per svolgere la prova è di **DUE ORE E MEZZA**.

È obbligatorio consegnare sia il testo, sia tutti i fogli ricevuti; al momento della consegna, inserite tutti gli altri fogli, compreso quello con il testo, dentro uno dei fogli a quadretti.

Potete usare solo il vostro materiale di scrittura e il vostro materiale di studio. Non usate il colore rosso.

1) Siano dati gli insiemi

$$A = \{x \in \mathbb{R} : \log_3(x-1) \leq 1\}; \quad B = \{x \in \mathbb{R} : \frac{|x^2 - 4| - 5}{|x| + 3} < 0\}.$$

i) Determinate A e B e rappresentateli sulla retta reale.

ii) Determinate gli insiemi $A \cup B$, $A \cap B$ e $A \setminus B$.

iii) Dite se A e B sono insiemi limitati. Determinate, se esistono, il minimo e il massimo di A .

2) Siano $f : [-1, 3] \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ le funzioni definite da

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{se } -1 \leq x \leq 0 \\ 2\sqrt[3]{x} & \text{se } 0 < x < 1 \\ 2^x & \text{se } 1 \leq x \leq 3 \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} 2 & \text{se } x \leq 0 \\ -1 & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

i) Rappresentate graficamente f e g .

ii) Determinate l'immagine di f . Rappresentate graficamente la funzione inversa $f^{-1} : f([-1, 3]) \rightarrow \mathbb{R}$.

iii) Determinate, nei loro domini, le espressioni delle funzioni $(f \circ g)(x)$ e $(g \circ f)(x)$.

iv) Determinate un insieme $A \subset \mathbb{R}$ tale che $g : A \rightarrow \mathbb{R}$ risulti una funzione iniettiva. Tale A è unico?

3) i) Calcolate, al variare di $k \in \{1, 2, 3\}$, il seguente limite: $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2^x + x^k}{3 + 2x^2 + \log|x|}$.

ii) Calcolate i limiti $\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{e^x}{x^2 - 4}$ e $\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{e^x}{x^2 - 4}$.

iii) Calcolate $\sum_{k=1}^3 f^{(k)}(0)$, dove $f(x) = e^{3x+1}$ e $f^{(1)}(x)$ denota la derivata (prima) di f , $f^{(2)}(x)$ denota la derivata (seconda) di f , e così via.

- 4) i) Rappresentate graficamente nel piano cartesiano l'insieme A delle coppie $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tali che

$$\begin{cases} x^2 + 4y^2 + 4x - 8y + 4 > 0 \\ y < \frac{1}{2}|x| \\ x + 5 > 0. \end{cases}$$

- ii) Dite se le seguenti affermazioni sono vere o se sono false (motivando le risposte):

- a) $\forall (x, y) \in A, x \geq -5$.
- b) $\exists (x, y) \in A : (x - 1)y = 0$.
- c) $\forall x \geq -5, \exists y > 1 : (x, y) \in A$.

-
- 5) i) Studiate (insieme di definizione, segno, comportamento agli estremi dell'insieme di definizione, asintoti, derivabilità, punti critici e monotonia) la funzione definita da

$$f(x) = \frac{x + 1}{x^2 + x - 2}$$

e rappresentatela graficamente nel piano cartesiano.

- ii) Verificate che $f(x) = \frac{1}{3(x+2)} + \frac{2}{3(x-1)}$ per ogni $x \in \text{dom} f$.
- iii) Determinate l'equazione della retta r tangente al grafico di f nel punto di coordinata $x = -3$.
- iv) Determinate l'area della regione piana E delimitata dal grafico di f , dalla retta r individuata nel punto iii), e dalla retta di equazione $x = -5$.

-
- 6) Il direttore di un istituto di ricerca ha a disposizione 10 ricercatrici e 6 ricercatori per fare una commissione di 4 donne e 3 uomini. Quante diverse commissioni può formare il direttore?
-