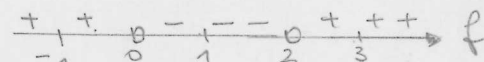


1) i) $f(x) = \frac{1}{x^2 - 2x}$

• $\text{dom } f = \mathbb{R} \setminus \{0, 2\} =]-\infty, 0[\cup]0, 2[\cup]2, +\infty[$

• segno di f



• $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ $y=0$ asintoto orizz. per f , per $x \rightarrow -\infty$

• $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x(x-2)} = +\infty$ $x=0$ asint. verticale (da sinistra) di f
 $\rightarrow$ infinitesimo negativo

• $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x(x-2)} = -\infty$ $x=0$ asint. verticale (da destra) di f
 $\rightarrow$ infinitesimo positivo

• $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{x(x-2)} = -\infty$ $x=2$ asint. verticale (da sinistra) di f
 $\rightarrow$ infinitesimo negativo

• $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{x(x-2)} = +\infty$ $x=2$ asint. verticale (da destra) di f
 $\rightarrow$ infinitesimo positivo

• $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2 - 2x} = 0$ $y=0$ asint. orizzontale per f , per $x \rightarrow +\infty$.

• f è continua su $\text{dom } f$, poiché rapporto di funzioni continue.

• $\text{dom } f' = \text{dom } f$ $f'(x) = \frac{-(2x-2)}{(x^2-2x)^2}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -(2x-2) = 0 \Leftrightarrow x = +1$ pr. critico per f

$x=1$ pr. di max. loc. stretto per f

$f(1) = \frac{1}{1-2} = -1$

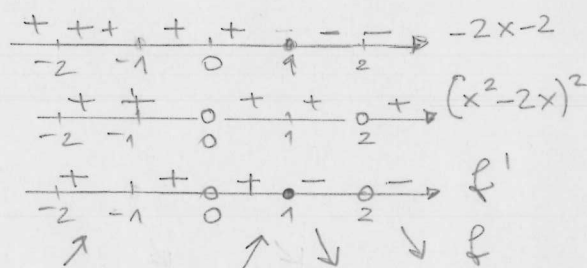
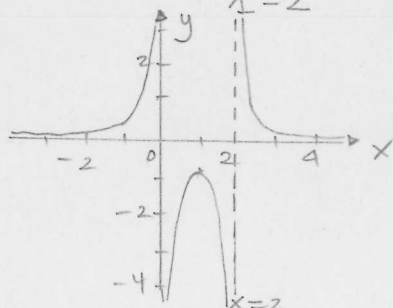


grafico qualitativo di f



ii) $f(x) \stackrel{?}{=} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x} \right) \quad \forall x \in \text{dom } f$

$= \frac{1}{2} \left(\frac{x - (x-2)}{x(x-2)} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{x^2 - 2x} \quad \forall x \in \text{dom } f.$

□

iii) $F(x) = \frac{1}{2} [\log(x-2) - \log x]$ è una primitiva di $f(x)$ su $]2, +\infty[$

(usando l'identità provata in i))

□

iv) $\int_3^4 f(x) dx = \underset{\text{iii)}}{\uparrow} [F(x)]_3^4 = \frac{1}{2} [\log(x-2) - \log x]_3^4 =$

$= \frac{1}{2} [(\log 2 - \log 4) - (\log 1 - \log 3)]$

$= \frac{1}{2} [\log 2 - \log 4 + \log 3] = \frac{1}{2} \log \frac{6}{2} =$

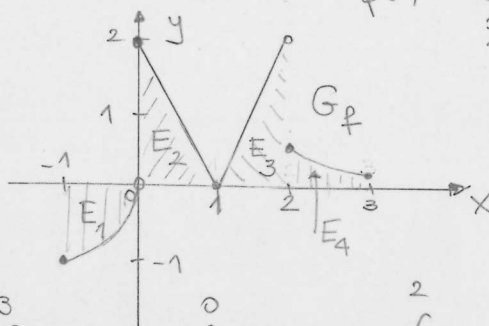
$= \log \sqrt{\frac{3}{2}}.$

■

2) $f: [-1, 3] \rightarrow \mathbb{R}$

$f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x} & \text{se } -1 \leq x < 0 \\ 2|x-1| & \text{se } 0 \leq x < 2 \\ \frac{2}{x^2} & \text{se } 2 \leq x \leq 3. \end{cases}$

i)



□

ii) $\int_{-1}^3 f(x) dx = \int_{-1}^0 \sqrt[3]{x} dx + \int_0^2 2|x-1| dx + \int_2^3 \frac{2}{x^2} dx =$

$= \left[\frac{x^{4/3}}{4/3} \right]_{-1}^0 + \int_0^1 (-2x+2) dx + \int_1^2 (2x-2) dx + \left[-2x^{-1} \right]_2^3$

$= -\frac{3}{4} (-1)^{4/3} + [-x^2 + 2x]_0^1 + [x^2 - 2x]_1^2 + \left(-\frac{2}{3} + \frac{1}{2} \right)$

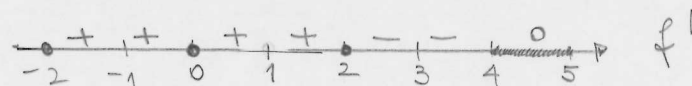
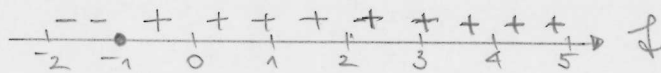
$= -\frac{3}{4} + 1 + 1 + \frac{1}{3}$

$= \underline{\underline{-\text{area } E_1 + \text{area } E_2 + \text{area } E_3 + \text{area } E_4}} = 2 - \frac{5}{12}$

$= \underline{\underline{\frac{19}{12}}}.$

■

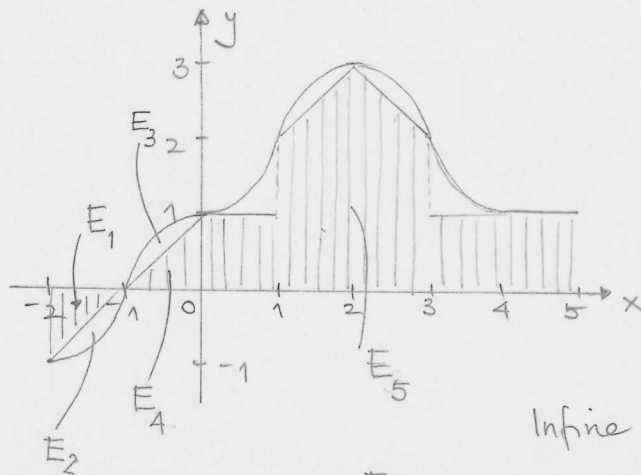
3)



□

- ii) Usando l'interpretazione geom. della funzione integrale si vede subito che $F(x)$ è decrescente in $[-2, -1]$ ed è crescente in $[-1, 5]$. A questa conclusione si può giungere anche usando il teorema fondamentale del calcolo integrale che assicura che $F'(x) = f(x)$ per ogni $x \in [-2, 5]$. Quindi il segno di $f(x)$ in $[-2, 5]$ è il segno di $F'(x)$ in $[-2, 5]$; possiamo quindi dire che $F(x)|_{[-2, -1]}$ è decrescente e $F(x)|_{[-1, 5]}$ è crescente. $\square$

iii)



Usando l'interpretazione geometrica della funzione integrale si ha subito che

$$\min_{x \in [-2, 5]} F(x) < -\text{area } E_1 = -\frac{1}{2}.$$

Infine

$$\begin{aligned} \max_{x \in [-2, 5]} F(x) &> -\text{area } E_1 - \text{area } E_2 + \text{area } E_3 + \text{area } E_4 \\ &\quad + \text{area } E_5 = 8. \end{aligned}$$

- iv) Dal teorema fond. del calcolo integrale possiamo dedurre $F''(x) = f'(x) \quad \forall x \in [-2, 5]$, essendo f derivabile in $[-2, 5]$. Quindi dal segno di f' possiamo dedurre il segno di $F''(x)$;

abbiamo allora

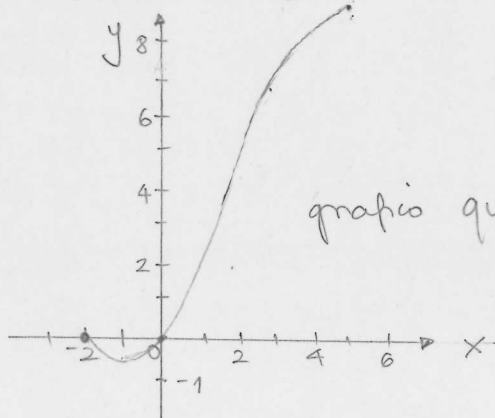
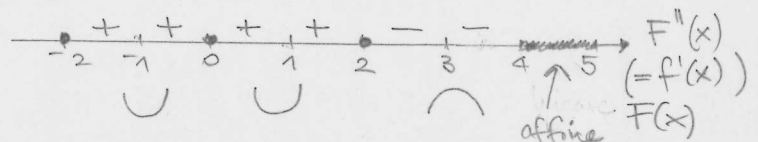
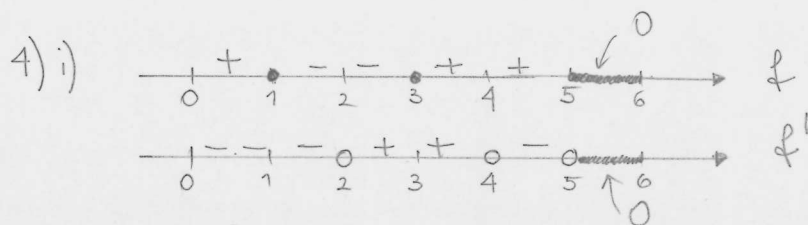
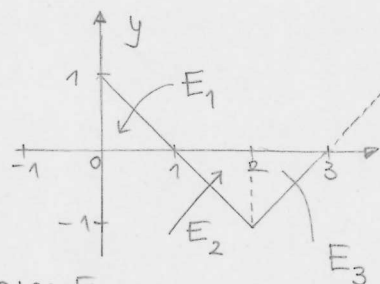


grafico qualitativo di $F(x)$



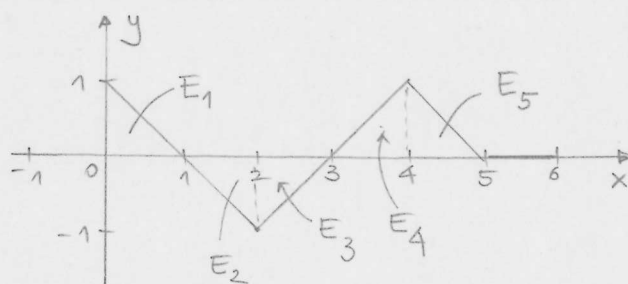


ii) $F(2) = \int_0^2 f(t) dt = \text{area } E_1 - \text{area } E_2$
 $= \underline{\underline{0}} ;$



$F(3) = \int_0^3 f(t) dt = \text{area } E_1 - \text{area } E_2 - \text{area } E_3$
 $= -\text{area } E_3 = \underline{\underline{-\frac{1}{2}}} ;$

$F(6) = \int_0^6 f(t) dt =$
 $= \text{area } E_1 - \text{area } E_2$
 $- \text{area } E_3 + \text{area } E_4$
 $+ \text{area } E_5 = \text{area } E_5$
 $= \underline{\underline{\frac{1}{2}}} .$



iii) $F(x) = \int_0^x f(t) dt = \int_0^x (-t+1) dt = \left[-\frac{t^2}{2} + t \right]_0^x = \underline{\underline{-\frac{x^2}{2} + x}} \quad x \in [0, 2]$

$F(x) = \int_0^2 f(t) dt + \int_2^x f(t) dt = \int_2^x f(t) dt = \int_2^x (t-3) dt = \left[\frac{t^2}{2} - 3t \right]_2^x =$
 $= \left(\frac{x^2}{2} - 3x \right) - \left(\frac{4}{2} - 6 \right) = \underline{\underline{\frac{x^2}{2} - 3x + 4}} \quad x \in [2, 4]$

5) i) RAGAZZO : $p_7^{2,2} = \frac{7!}{2!2!} ;$

ESAME $p_5^2 = \frac{5!}{2!} ;$

SUPERATO $p_8 = \underline{\underline{8!}}$ □

ii) $C_{15,3} = \frac{15!}{12! 3!} = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12!}{12! 3 \cdot 2} = 35 \cdot 13 = \underline{\underline{455}}$ □

$$\text{iii) } C_{2,1} \cdot C_{3,1} \cdot C_{6,1} = \cancel{2}! \cdot \frac{3!}{\cancel{2}!} \cdot \frac{6!}{5!} = 3! \cdot 6 \cdot \frac{\cancel{5}!}{\cancel{5}!} = \underline{\underline{36}} \quad \square$$

$$\text{iv) } D_{20,5} = \frac{20!}{15!} = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot \cancel{15}!}{\cancel{15}!}$$

