

1) $a^2x^2 - 12a = -8a + 4x \Leftrightarrow a^2x^2 - 4x - 4a = 0$

Se $a=0$, si ha la soluzione $x=0$; se $a \neq 0$, allora vale

$$x_{1/2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 16a^3}}{2a^2} = \frac{4 \pm 4\sqrt{1+a^3}}{2a^2}. \text{ Ne segue che si}$$

ha almeno una soluzione per l'eq. assegnata se $1+a^3 \geq 0$, ossia $a^3 \geq -1$, ossia $a \geq -1$ con $a \neq 0$.

In conclusione, esiste almeno una soluzione dell'eq. assegnata se $a \geq -1$, ossia $a \in [-1, +\infty[$ (che è un intervallo!).

Se $a=0$, la soluzione è data da $x=0$; se $a \geq -1, a \neq 0$ abbiamo come soluzioni $x_{1/2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{1+a^3}}{a^2}$ (essa è unica se $a=-1$; ce ne sono due se $a > -1, a \neq 0$). ■

2) i) $A = \{x \in \mathbb{R} : \frac{(x^2+5x+6)x^2}{x-2} < 0\}$

$=]-\infty, -3[\cup]-2, 2[\setminus \{0\}$

$x^2+5x+6 = (x+3)(x+2)$

x^2

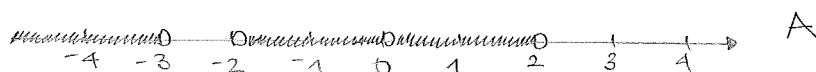
$x-2$

$\frac{(x^2+5x+6)x^2}{x-2}$

$B = \{x \in \mathbb{R} : \frac{3x^2-2x}{x^2+1} > 0\}$

$= \{x \in \mathbb{R} : \frac{x(3x-2)}{x^2+1} > 0\} =]-\infty, 0[\cup]\frac{2}{3}, +\infty[$

(oss. $x^2+1 > 0 \forall x \in \mathbb{R}$; quindi $\frac{3x^2-2x}{x^2+1} > 0 \Leftrightarrow 3x^2-2x > 0$).

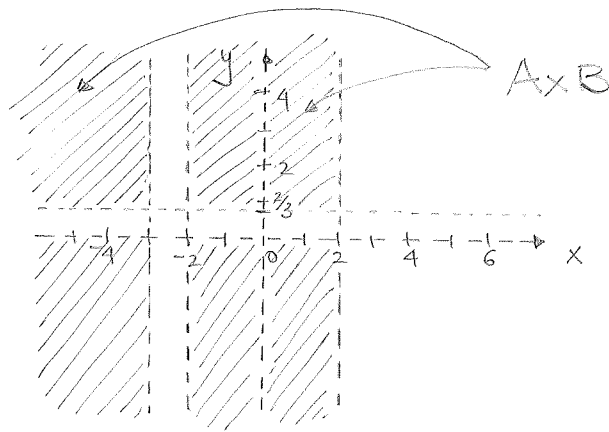


A

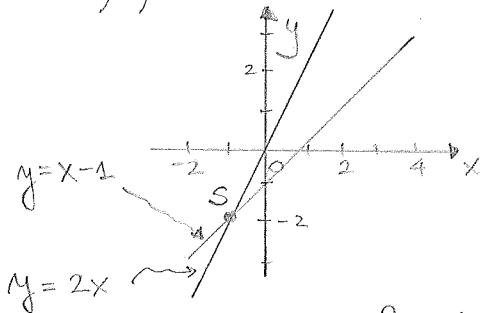


B

ii) $A \cup B = \mathbb{R} \setminus \{0\}$; $A \cap B =]-\infty, -3[\cup]-2, 0[\cup]\frac{2}{3}, 2[$.

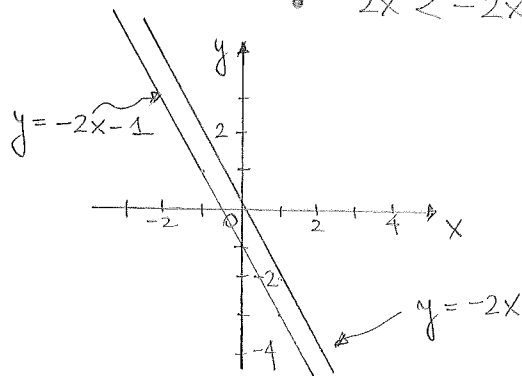


3) i) • $2x = x - 1 \Leftrightarrow \underline{x = -1}$. Interpret. geom. dell'eq. $2x = x - 1$:



risolvendo l'eq. si trova la coordinata x del pr. di intersezione S delle due rette di eq. $y = 2x$ e $y = x - 1$.

• $-2x < -2x - 1 \Leftrightarrow 0 < -1$; mai!

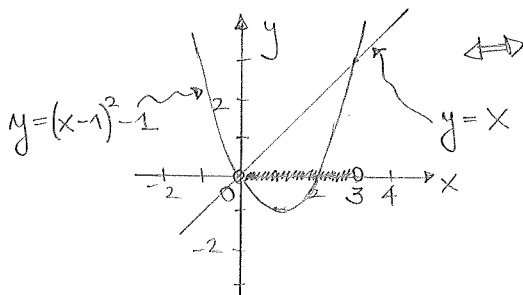


Interpret. geom. della diseq. $-2x < -2x - 1$:

la soluzione corrisponde alle coordinate x dei pr. (x, y) appartenenti alla retta $y = -2x$, per i quali $y = -2x$ è minore di $y = -2x - 1$ che intuitiv. significa le x per cui la retta $y = -2x$

"sta sotto" la retta $y = -2x - 1$. E questo avviene per nessun x !

• $(x-1)^2 - 1 < x \Leftrightarrow x^2 - 2x + \cancel{1} - \cancel{1} < x \Leftrightarrow x^2 - 3x < 0$



$\Leftrightarrow \underline{x \in]0, 3[}$.

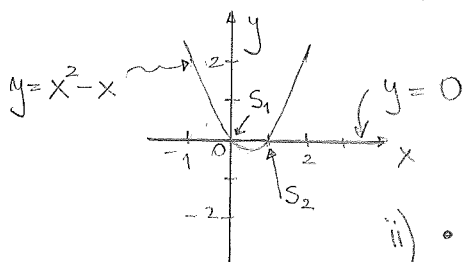
Interpret. geom. della diseq. $(x-1)^2 - 1 < x$:

la soluzione corrisponde alle coordinate x dei pr. (x, y) appartenenti alla parabola $y = (x-1)^2 - 1$, per

i quali $y = (x-1)^2 - 1$ è minore di $y = x$ che intuitiv. significa le x per cui la parabola "sta sotto" la retta $y = x$.

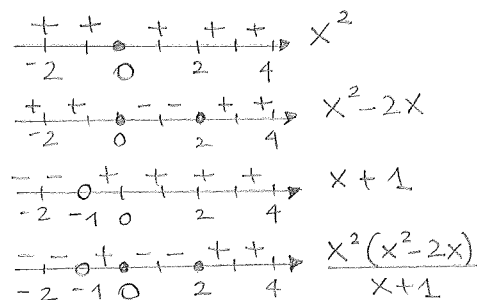
• $x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x(x-1) = 0 \Leftrightarrow \underline{x \in \{0, 1\}}$. Interpret. geom.

dell'eq. $x^2 - x = 0$: risolvendo l'eq. si trovano le coordinate x dei pt. di intersezione S_1 e S_2 della parabola di eq. $y = x^2 - x$ e la retta $y = 0$.



$$ii) \cdot \frac{x^2(x^2 - 2x)}{x+1} < 0$$

$$S =]-\infty, -1[\cup]0, 2[.$$

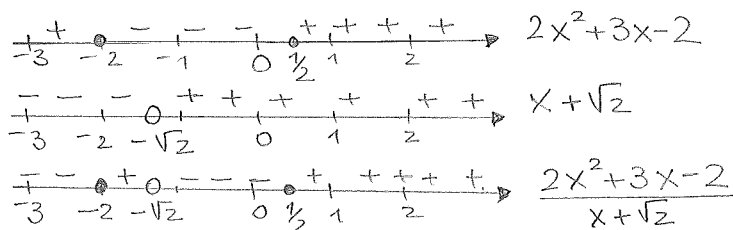


$$\bullet \frac{x^2 + 3x}{x + \sqrt{2}} \leq \sqrt{2} - x \Leftrightarrow \frac{x^2 + 3x}{x + \sqrt{2}} - \sqrt{2} + x \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2 + 3x + x^2 - 2}{x + \sqrt{2}} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{2x^2 + 3x - 2}{x + \sqrt{2}} \leq 0$$

$$\text{ora: } 2x^2 + 3x - 2 = 0 \Leftrightarrow x_{\frac{2}{2}} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 16}}{4} = \frac{-3 \pm 5}{4} = \begin{cases} -2 \\ \frac{1}{2} \end{cases}$$

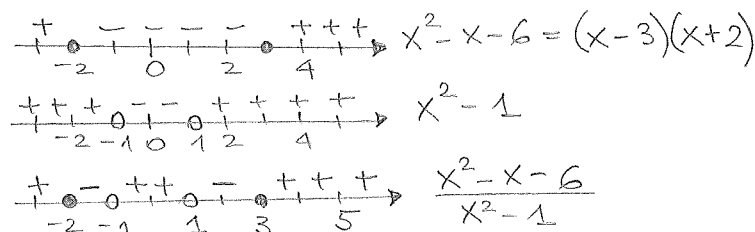
$$S =]-\infty, -2] \cup]\frac{1}{2}, 1[.$$



$$\bullet \frac{2x^2 - 7 - x}{x^2 - 1} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{2x^2 - 7 - x}{x^2 - 1} - 1 \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x^2 - 7 - x - x^2 + 1}{x^2 - 1} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 1} \leq 0$$

$$S = [-2, -1[\cup]1, 3].$$



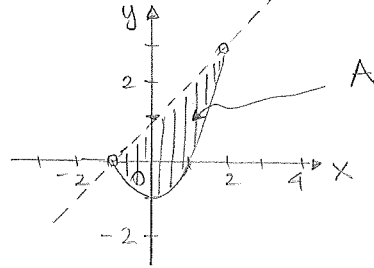
$$\bullet (3x + x^3 - 4x^2)(x - 2)^2 = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 4x + 3)(x - 2)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x - 3)(x - 1)(x - 2)^2 = 0 \quad S = \{0, 1, 2, 3\}.$$

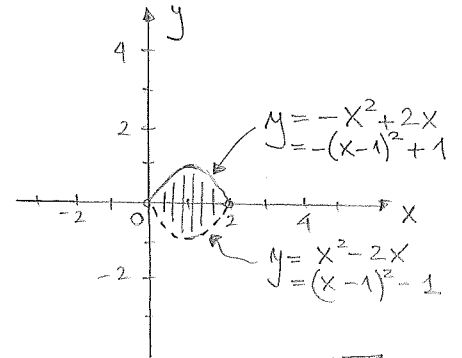
4) i) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - 1 \leq y < x + 1\}$

nota: $x^2 - 1 = x + 1$

$\Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow (x-2)(x+1) = 0$

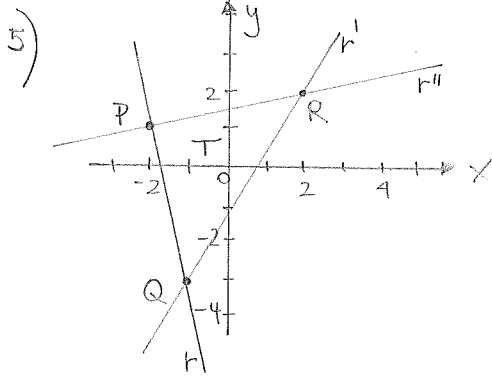


$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - 2x < y \leq -x^2 + 2x\}$



ii) $y = k$ con $k < -1$ o $k \geq 3$.

iii) $x = k$ con $k \in]0, 2[$.



$r: \frac{y-1}{-3-1} = \frac{x+2}{-1+2} \Leftrightarrow y-1 = -4(x+2)$

$y = -4x - 7$

$r': \frac{y+3}{2+3} = \frac{x+1}{2+1} \Leftrightarrow y+3 = \frac{5}{3}(x+1)$

$y = \frac{5}{3}x - \frac{4}{3}$

$r'': \frac{y-1}{2-1} = \frac{x+2}{2+2} \Leftrightarrow y-1 = \frac{1}{4}(x+2)$

$y = \frac{1}{4}x + \frac{3}{2}$

Notiamo che $r \perp r''$. Inoltre $PQ = \sqrt{(-2+1)^2 + (1+3)^2} = \sqrt{1+16} = \sqrt{17}$

$PR = \sqrt{(-2-2)^2 + (1-2)^2} = \sqrt{16+1} = \sqrt{17}$

area $T = \frac{\sqrt{17} \cdot \sqrt{17}}{2} = \frac{17}{2}$

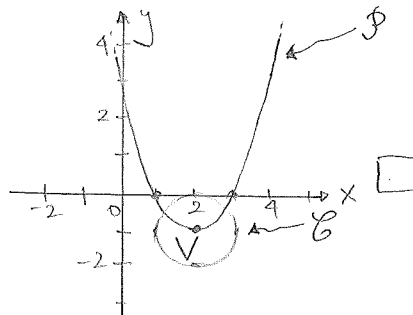
6) i) $y = x^2 - 4x + 3$
 $= (x-2)^2 - 1$

$V = (2, -1)$

ii) $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 1$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 4x + 2y + 4 = 0$

iii)



$x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow (x-3)(x-1) = 0$

