

$$1) a) \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^x - 4^{x^2-3x} \leq 0 \Leftrightarrow 4^{-x} \leq 4^{x^2-3x}$$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \underset{4^x \uparrow}{-x} \leq x^2 - 3x \Leftrightarrow 0 \leq x^2 - 2x \\ &\Rightarrow \underline{S =]-\infty, 0] \cup [2, +\infty[}. \end{aligned}$$

$$\cdot e^x \cdot e^{3-x^2} > \frac{1}{e^x} \Leftrightarrow e^{x+3-x^2} > e^{-x} \Leftrightarrow \underset{e^x \uparrow}{x+3-x^2} > -x \Leftrightarrow x^2-2x-3 < 0$$

$$\Leftrightarrow (x-3)(x+1) < 0$$

$$\Rightarrow \underline{S =]-1, 3[}.$$

$$\cdot \frac{3^{|x|} \cdot 3^x}{9^x} = 9^{x^2} \Leftrightarrow 3^{|x|+x-2x} = 3^{2x^2} \Leftrightarrow |x|-x = 2x^2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x-x = 2x^2 \end{cases} \quad \circ \quad \begin{cases} x < 0 \\ -x-x = 2x^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 = 0 \end{cases} \quad \circ \quad \begin{cases} x < 0 \\ 2x^2 + 2x = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \end{cases} \quad \circ \quad \begin{cases} x < 0 \\ x(x+1) = 0 \end{cases} \quad \underline{S = \{-1, 0\}}. \quad \square$$

$$b) \cdot \log_2(1+x^2) > \log_2(2|x|) \Leftrightarrow \begin{cases} 1+x^2 > 0 \\ |x| > 0 \\ 1+x^2 > 2|x| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathbb{R} \\ x \neq 0 \\ 1+x^2 > 2|x| \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ 1+x^2 > -2x \end{cases} \quad \circ \quad \begin{cases} x > 0 \\ 1+x^2 > 2x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ x^2 + 2x + 1 > 0 \end{cases} \quad \circ \quad \begin{cases} x > 0 \\ x^2 - 2x + 1 > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ (x+1)^2 > 0 \end{cases} \quad \circ \quad \begin{cases} x > 0 \\ (x-1)^2 > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x \in]-\infty, 0[\setminus \{-1\} \quad \circ \quad x \in]0, +\infty[\setminus \{1\}$$

$$\Rightarrow \underline{S = \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}}.$$

$$\cdot \log_3(1-x) - \log_3(1+|x|) > -1 \Leftrightarrow \log_3(1-x) - \log_3(1+|x|) + \log_3 3 > 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1-x > 0 \\ 1+|x| > 0 \\ \log_3 3(1-x) > \log_3(1+|x|) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-x > 0 \\ 1+|x| > 0 \\ 3(1-x) > (1+|x|) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < 1 \\ \mathbb{R}_1 \\ 3(1-x) > (1+|x|) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x < 1 \\ 3(1-x) > 1+x \end{cases} \quad \circ \quad \begin{cases} x < 0 \\ 3(1-x) > 1-x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x < 1 \\ 4x < 2 \end{cases} \quad \circ \quad \begin{cases} x < 0 \\ 2x < 2 \end{cases} \Rightarrow \underline{\underline{S =]-\infty, \frac{1}{2}[}} \quad \square$$

c) $x^2 \log_{\frac{1}{3}} 3 + x \log_2 2^3 + 2 \log_e 2 \geq 0$

$$\Leftrightarrow x^2(-1) + x \cdot 3 + 2 \cdot 2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 - 3x - 4 \leq 0 \Leftrightarrow (x-4)(x+1) \leq 0 \Rightarrow \underline{\underline{S = [-1, 4]}} \quad \square$$

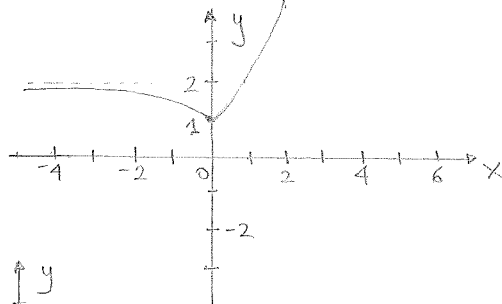
• $\log_3(2-x) < \log_3(2+x) - \log_3 x + 1$

$$\Leftrightarrow \log_3(2-x) + \log_3 x < \log_3(2+x) + \log_3 3$$

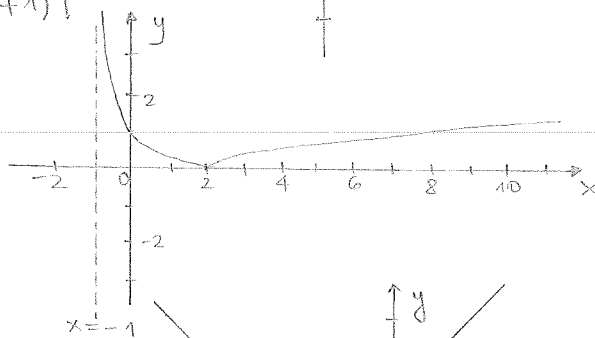
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2-x > 0 \\ x > 0 \\ 2+x > 0 \\ \log_3 x(2-x) < \log_3 3(2+x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 2 \\ x > 0 \\ x > -2 \\ 2x - x^2 < 6 + 3x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 2 \\ x^2 + x + 6 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 2 \\ \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow \underline{\underline{S =]0, 2[}} \quad \square$$

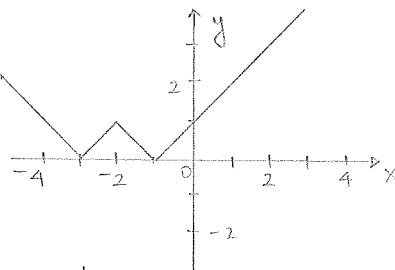
2) $x \mapsto |2^x - 1| + 1$
 $\mathbb{R}$



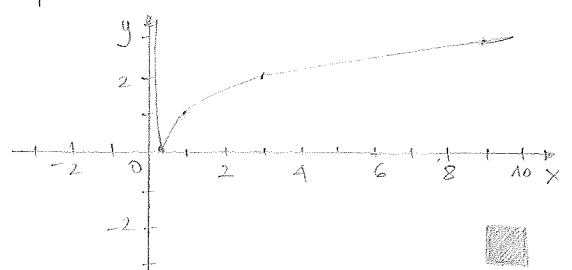
$x \mapsto |1 - \log_3(x+1)|$
 $\mathbb{R}$
 $] -1, +\infty[$



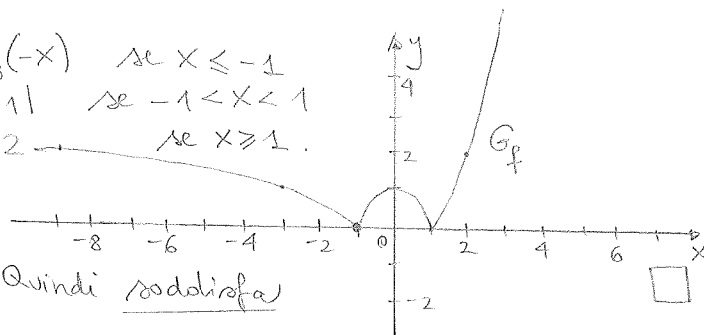
$x \mapsto ||x+2| - 1|$
 $\mathbb{R}$



$x \mapsto |\log_{\frac{1}{3}} x + \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2}| = |\log_{\frac{1}{3}} x - 1|$
 $\mathbb{R}$
 $]0, +\infty[$



3) i) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = \begin{cases} \log_3(-x) & \text{se } x \leq -1 \\ |x^2 - 1| & \text{se } -1 < x < 1 \\ 2^x - 2 & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$



ii) f è continua su $[-3, 2]$. Quindi soddisfa

le ipotesi del teorema di Weierstrass.

$\max_{[-3, 2]} f = \underline{2}$ $x = 2$ pt. di massimo $\min_{[-3, 2]} f = 0$ $x \in \{-1, 1\}$ pt. di minimo.

iii) f è continua su $[-3, 2]$ con $f(-3) = 1 (> 0)$ e $f(2) = 2 (> 0)$. □

Quindi f non soddisfa tutte le ipotesi del teorema di esistenza degli zeri su $[-3, 2]$. f ha comunque zeri su $[-3, 2]$, cioè $x_0 = -1$ e $x_0 = 1$.
(ricordo che il teorema di Deura degli zeri ci dà condizioni sufficienti affinché f ammetta almeno uno zero, ma non condizioni necessarie). ■

4) $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x - 2x - 2$ è una funzione continua su $[-1, 0]$

(somma di funzioni continue). Inoltre $f(-1) = \left(\frac{1}{3}\right)^{-1} - 2(-1) - 2 = 3 (> 0)$
 $f(0) = \left(\frac{1}{3}\right)^0 - 2 \cdot 0 - 2 = 1 - 2 = -1 (< 0)$.

Per il teorema di Deura degli zeri esiste $x_0 \in]-1, 0[: f(x_0) = 0$.

Poiché $\left(\frac{1}{3}\right)^x$ è una funzione decrescente su $\mathbb{R}$, $-2x - 2$ è una funzione decrescente su $\mathbb{R}$, abbiamo che $f(x)$ è decrescente su $[-1, 0]$, quindi x_0 è unico! (ci può essere un solo pt. di intersezione della funzione f con l'asse x).

Consideriamo ora il pt. medio di $[-1, 0]$: esso è dato da $a_1 = \frac{-1+0}{2} = -\frac{1}{2}$.

Ora $f\left(-\frac{1}{2}\right) = 3^{\frac{1}{2}} + 2 \cdot \frac{1}{2} - 2 = \sqrt{3} - 1 > 0$, quindi x_0 viene a trovarsi nell'intervallo $\left[-\frac{1}{2}, 0\right]$. Consideriamo ora il pt. medio di

$\left[-\frac{1}{2}, 0\right]$: esso è dato da $a_2 = \frac{-\frac{1}{2}+0}{2} = -\frac{1}{4}$. Ora $f\left(-\frac{1}{4}\right) = 3^{\frac{1}{4}} + 2 \cdot \frac{1}{4} - 2 = 3^{\frac{1}{4}} - \frac{3}{2} < 0$ (vedi la nota che $\sqrt[4]{3} \sim 1.3$). Quindi possiamo

asserire che $x_0 \in \left]-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right[$ e porre $[\tilde{a}, \tilde{b}] = \left]-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right[$. ■

5) i) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \underline{\underline{1}}$; $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \underline{\underline{1}}$; $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \underline{\underline{0}}$;

$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \underline{\underline{+\infty}}$; $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \underline{\underline{-\infty}}$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \underline{\underline{-2}}$.



iii) ii)



pt. di discontinuità, in cui f risulta positiva: $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty$

pt. di discontinuità, in cui f è nulla;

$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 1 \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0 = f(0).$



iv) $\max_{[-2,0]} f = \underline{\underline{2}}$ $x = -1$ pt. di massimo;

$\min_{[-2,0]} f = \underline{\underline{0}}$ $x = 0$ pt. di minimo.

