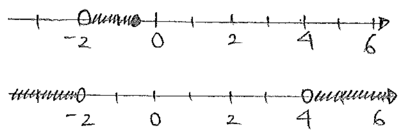
Università di Trento – Dip. di Psicologia e Scienze Cognitive
CdL in Scienze e Tecniche di Psicologia Cognitiva
ESAME SCRITTO DI ANALISI MATEMATICA
a.a. 2015 – 2016 – Rovereto, 11 gennaio 2016

FILA C

1) i) $A = \{x \in \mathbb{R} : (\log_2 4)\log(x+2) - \log(x+5) \le \log(-x)\}$
$= \left]-2, -\frac{1}{2}\right]$ $\longleftarrow$ (vedi SPI, 11/01/16, Fila A, Es.1)

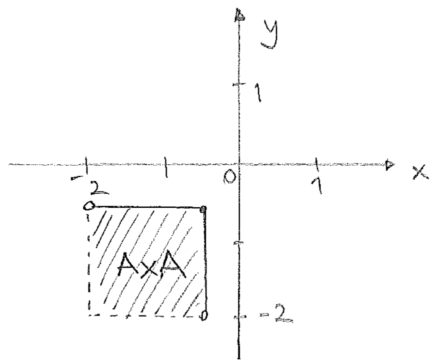
$B = \{x \in \mathbb{R} : 3|x+1| - x^2 < -1\} = \left]-\infty, -2\right[\cup \left]4, +\infty\right[$



A — A è un intervallo

B — B non è un intervallo.

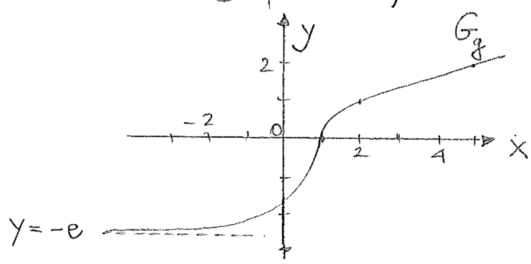
ii) $A \cap B = \emptyset$; $A \setminus B = A$.



iii) A è un insieme limitato,
B non è un insieme limitato (né superiormente, né inferiormente).
$\nexists \min A$; $\max A = -\frac{1}{2}$.

2) i) $f(x) = |2x| - x$ (vedi SPI, 11/01/16 Fila A, Es.3)

$g(x) = \begin{cases} e^x - e & \text{se } x < 1 \\ \sqrt{x-1} & \text{se } x \ge 1 \end{cases}$



ii) vedi sopra

iii) f non è iniettiva; infatti $x_1 = -\frac{1}{3} \ne x_2 = 1$ e $f(x_1) = f(x_2)$.
$g(\mathbb{R}) = \left]-e, +\infty\right[$.

iv) $\min_{[-1,2]} f = 0$ $x = 0$ pt. di minimo di f su $[-1,2]$.

$\max_{[-1,2]} f = \underline{\underline{3}}$ $\quad \underline{\underline{x=-1}}$ pt. di massimo di f su $[-1,2]$.

v) $f\circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è ben definita.

Osserviamo che $g(x) < 0$ se $x < 1$, mentre $g(x) \geq 0$ se $x \geq 1$;

quindi

$$(f\circ g)(x) = f(g(x)) = \begin{cases} g(x) & \text{se } x \geq 1 \\ -3g(x) & \text{se } x < 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \sqrt{x-1} & \text{se } x \geq 1 \\ -3(e^x - e) & \text{se } x < 1 . \end{cases}$$

3) i) $$\int_1^2 \left(\frac{1}{3x+1} + \frac{1}{x^2}\right) dx = \frac{1}{3}\int_1^2 \frac{3}{3x+1}\,dx + \int_1^2 \frac{1}{x^2}\,dx = \frac{1}{3}\Big[\log|3x+1|\Big]_1^2 + \left[-\frac{1}{x}\right]_1^2 =$$

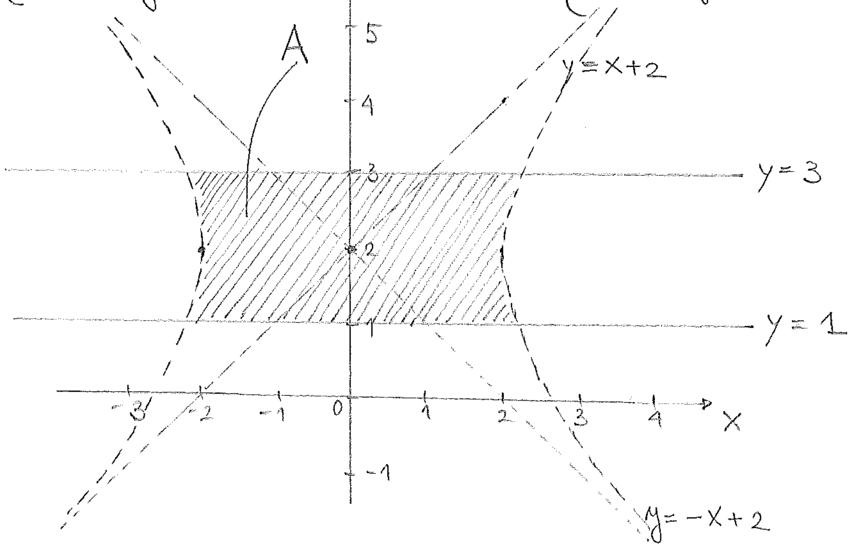
$$= \frac{1}{3}\left(\log 7 - \log 4\right) + \left(-\frac{1}{2}+1\right) = \frac{1}{3}\log\frac{7}{4} + \frac{1}{2} =$$

$$= \underline{\underline{\log\sqrt[3]{\frac{7}{4}} + \frac{1}{2}}} .$$

Altrimenti vedi SPI, 11/01/16, FILA A, Es. 2; Es. 4, Es. 5.

6) $$\begin{cases} x^2 - y^2 + 4y - 8 < 0 \\ |y-2| \leq 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 - (y^2 - 4y) - 8 < 0 \\ -1 \leq y-2 \leq 1 \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} x^2 - (y-2)^2 - 4 < 0 \\ 1 \leq y \leq 3 \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{x^2}{4} - \frac{(y-2)^2}{4} < 1 \\ 1 \leq y \leq 3 \end{cases}$$

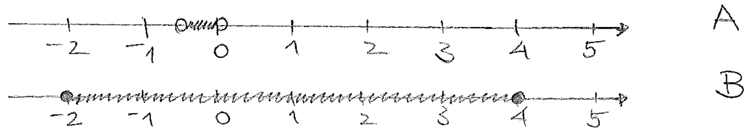


FILA (D)

1) i) $A=\{x\in\mathbb{R} : (\log_3 9)\log(x+2)-\log(x+5)>\log(-x)\}$

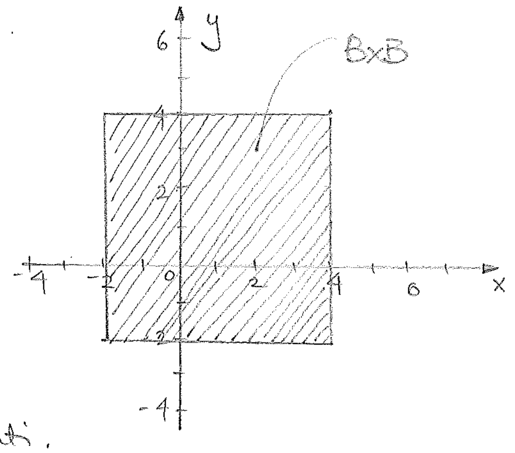
$= \underline{\left]-\tfrac{1}{2},0\right[}$ ← (vedi SPI, 11/01/16, Fila (B), Es.1)

$B=\{x\in\mathbb{R} : 3|x+1|-x^2\geq -1\} = \underline{[-2,4]}$.



Sia A che B sono intervalli.

ii) $A\cap B = A$; $A\setminus B=\emptyset$.

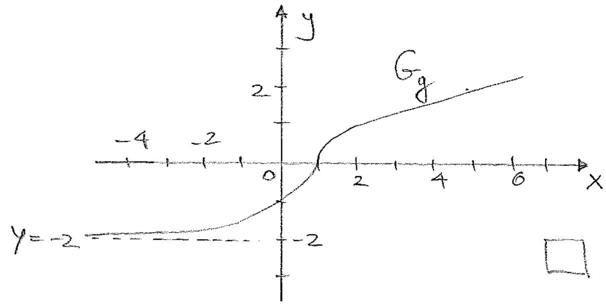


iii) Sia A che B sono insiemi limitati.

$\min B = -2$, $\max B = 4$.

2) i) $f(x)=x-|3x|$ (vedi SPI, 11/01/16, Fila (B), Es. 3)

$g(x)=\begin{cases} 2^x-2 & \text{se } x<1 \\ \sqrt{x-1} & \text{se } x\geq 1\end{cases}$



ii) vedi sopra.

iii) f non è iniettiva; infatti $x_1=-1\neq x_2=2$ e $f(x_1)=f(x_2)$.

$g(\mathbb{R}) = \left]-2,+\infty\right[$.

iv) $\min\limits_{[-3,1]} f = -12$ $x=-3$ pt. di minimo per f su $[-3,1]$;

$\max\limits_{[-3,1]} f = 0$ $x=0$ pt. di massimo per f su $[-3,1]$.

v) $f \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è ben definita.

Osserviamo che $g(x) < 0$ se $x < 1$, mentre $g(x) \geq 0$ se $x \geq 1$;

quindi

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \begin{cases} -2g(x) & \text{se } x \geq 1 \\ 4\,g(x) & \text{se } x < 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} -2\sqrt{x-1} & \text{se } x \geq 1 \\ 4(2^x - 2) & \text{se } x < 1 . \end{cases}$$ ■

3) i) $$\int_1^2 \left(\frac{1}{4x+1} - \frac{1}{x^2}\right) dx = \frac{1}{4} \int_1^2 \frac{4}{4x+1}\, dx - \int_1^2 \frac{1}{x^2}\, dx =$$

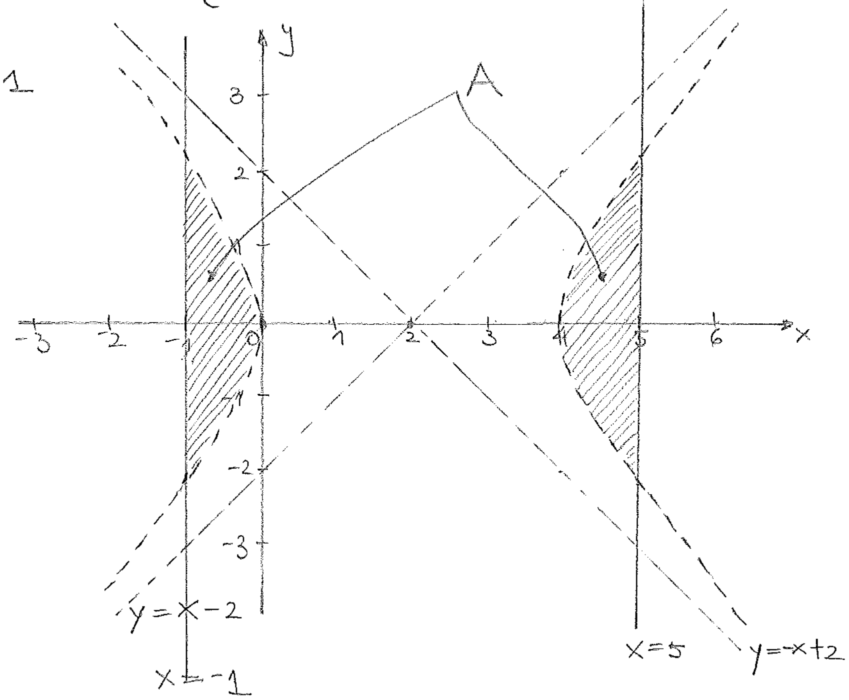
$$= \frac{1}{4}\Big[\log|4x+1|\Big]_1^2 - \left[-\frac{1}{x}\right]_1^2 = \frac{1}{4}\left(\log 9 - \log 5\right) - \left(-\frac{1}{2} + 1\right)$$

$$= \frac{1}{4} \log \frac{9}{5} - \frac{1}{2} = \underline{\underline{\log \sqrt[4]{\frac{9}{5}} - \frac{1}{2}}} .$$

Altrimenti vedi SPI, 11/01/16, Fila B Es. 2, Es. 4, Es. 5. ■

6) $$\begin{cases} x^2 - 4x - y^2 > 0 \\ |x-2| \leq 3 \end{cases} \iff \begin{cases} (x-2)^2 - 4 - y^2 > 0 \\ -3 \leq x-2 \leq 3 \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} \dfrac{(x-2)^2}{4} - \dfrac{y^2}{4} > 1 \\ -1 \leq x \leq 5 \end{cases}$$



■