Università di Trento - Dip. di Psicologia e Scienze Cognitive
CdL in Scienze e Tecniche di Psicologia Cognitiva
ESAME SCRITTO DI ANALISI MATEMATICA
a.a. 2015-2016 - Rovereto, 28 giugno 2016

FILA A

1) i) • $\dfrac{e^{x^2} e^{-2|x|}}{e^{3x}} = 1 \iff e^{x^2-2|x|-3x} = e^0$

$\iff x^2-2|x|-3x=0$ (poiché $e^x \nearrow$).

Dobbiamo allora risolvere $\begin{cases} x \geq 0 \\ x^2-2x-3x=0 \end{cases}$ o $\begin{cases} x<0 \\ x^2+2x-3x=0 \end{cases}$.

Abbiamo $\begin{cases} x \geq 0 \\ x(x-5)=0 \end{cases}$ o $\begin{cases} x<0 \\ x(x-1)=0 \end{cases} \Rightarrow \underline{\underline{S=\{0,5\}}}$.

• $\log(x^2-1) - \log(2x+2) \leq 0 \iff \begin{cases} x^2-1>0 \\ 2x+2>0 \\ x^2-1 \leq 2x+2 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} x<-1 \text{ o } x>1 \\ x>-1 \\ x^2-2x-3 \leq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x>1 \\ (x-3)(x+1) \leq 0 \end{cases}$

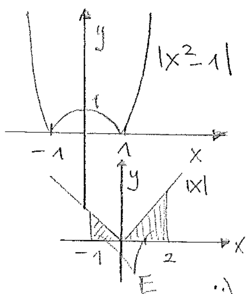
$\Rightarrow \underline{\underline{S=\,]1,3]}}$. ☐

ii) Sia $A(x)$ = "Il giorno x va vissuto bene". Allora

A = "$\forall x, A(x)$". ■

2) i) $\displaystyle\int_1^2 \frac{3x^3+2x+1}{x}\,dx = \int_1^2 \left[3x^2+2+\frac{1}{x}\right]dx = \left[x^3+2x+\log|x|\right]_1^2 =$

$= (8+4+\log 2) - (1+2+\cancel{\log 1}) = \underline{\underline{9+\log 2}}$.



$\displaystyle\int_{-1}^2 (|x^2-1|+|x|)\,dx = \int_{-1}^1 (-x^2+1)\,dx + \int_1^2 (x^2-1)\,dx + \text{area } E$

$= \left[-\frac{x^3}{3}+x\right]_{-1}^1 + \left[\frac{x^3}{3}-x\right]_1^2 + \frac{5}{2} = \frac{8}{3}+\frac{5}{2} = \underline{\underline{\frac{31}{6}}}$. ☐

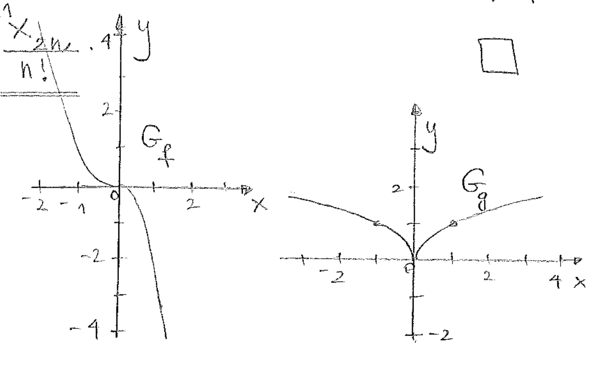
ii) $x_2 - \dfrac{x_4}{2!} + \dfrac{x_6}{3!} - \dots + \dfrac{x_{14}}{7!} = \underline{\underline{\displaystyle\sum_{n=1}^{7} (-1)^{n+1} \frac{x_{2n}}{n!}}}$. ☐

iii) $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \leq 0 \\ -2x^2 & \text{se } x > 0 \end{cases}$

$g(x) = |\sqrt[3]{x}|$

a)



b) $\lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{f(h)-f(0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{h^2-0}{h} = 0$

$\lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{f(h)-f(0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{-2h^2-0}{h} = 0$

$\Rightarrow$ f è derivabile in $x=0$ e $f'(0)=0$.

c) g non è iniettiva; infatti, basta prendere x_1 qualsiasi e $x_2=-x_1$ e si ha $x_1 \neq x_2$ e $g(x_1)=g(x_2)$. $\square$

$\underline{g(\mathbb{R})=[0,+\infty[}$. $\square$

d) $(fg)(-1)=f(-1)\,g(-1)=1\cdot 1=\underline{1}$;

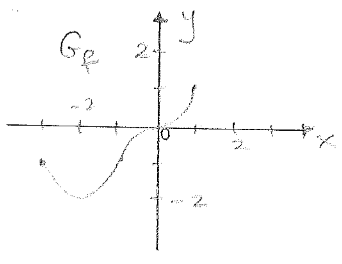
$(f+g)(-1)=f(-1)+g(-1)=\underline{2}$; $\qquad (g\circ f)(2)=g(f(2))=g(-8)=\underline{2}$. $\blacksquare$

3) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3-3x+1$

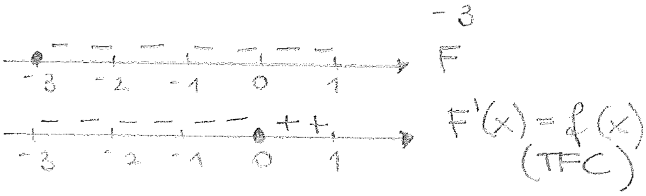
i) f è una funzione continua su $\mathbb{R}$ e quindi, in particolare, su $[0,1]$. Inoltre $f(0)=1$, $f(1)=-1$. Quindi, per il teorema di Jensa degli zeri, $\exists\, x_0\in\,]0,1[$ t.c. $f(x_0)=0$.
Notiamo inoltre che $f'(x)=3x^2-3<0$ su $]-1,1[$, quindi f è strett. decrescente su $]-1,1[$ e quindi su $]0,1[$; possiamo allora asserire che x_0 è unico! $\square$

ii) Procediamo usando il metodo di bisezione.
Consideriamo il pt. medio dell'intervallo $[0,1]$, ossia $a_1=\frac{1}{2}$. Si ha $f(a_1)=\frac{1}{8}-\frac{3}{2}+1=-\frac{3}{8}<0$. Procediamo considerando il punto medio dell'intervallo $[0,\frac{1}{2}]$, ossia $a_2=\frac{1}{4}$. Si ha $f(a_2)=\frac{1}{64}-\frac{3}{4}+1=\frac{17}{64}$. Possiamo allora definire $[\tilde{a},\tilde{b}]=[\frac{1}{4},\frac{1}{2}]$ e asserire che $x_0\in[\frac{1}{4},\frac{1}{2}]$. $\blacksquare$

4) $f:[-3,1]\to\mathbb{R}$ e $F:[-3,1]\to\mathbb{R}$, $F(x)=\displaystyle\int_{-3}^{x} f(t)\,dt$



i)

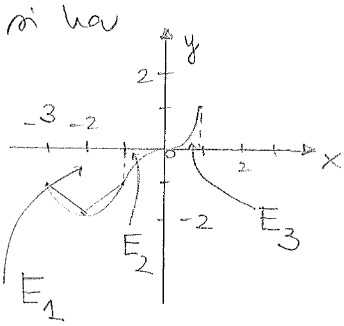


$\square$

ii) F è decrescente su $[-3,0]$ e crescente su $[0,1]$

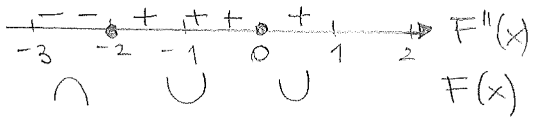
Risulta che $x=-3$, $x=1$ sono pt. di massimo locale per F, mentre $x=0$ è pt. di minimo locale per F. □

iii) Usando l'interpretazione geom. dell'integrale e la definizione di $F(x)$ si ha



$$\min_{x\in[-3,1]} F(x) = F(0) = -\text{area}\,E_1 - \text{area}\,E_2 < -3 - \text{area}\,E_2 < -3.$$

iv) Poiché f è derivabile in $[-3,1]$, dal TFC segue $F''(x) = f'(x)$ in $[-3,1]$, quindi



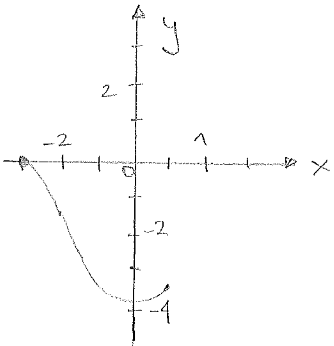
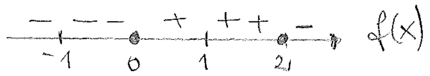


grafico qualitativo di F ■

5) $\boxed{f(x) = x^3(2-x)}$ i) • $\operatorname{dom} f = \mathbb{R}$,

•

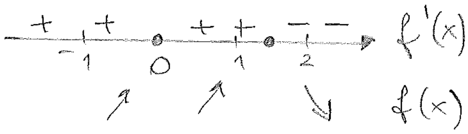


• $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

• ∄ sono asintoti

• $\operatorname{dom} f' = \mathbb{R}$, $f'(x) = 6x^2 - 4x^3 = 2x^2(3-2x)$

$x=0$, $x=\frac{3}{2}$, sono pt. critici di f



$x=0$ non è né pt. di max loc. né pt. di min loc e $f(0)=0$

$x = \frac{3}{2}$ pt. di max. loc. di f; $f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{27}{8}\left(2-\frac{3}{2}\right) = \frac{27}{16} < 2$

• $\operatorname{dom} f'' = \mathbb{R}$, $f''(x) = 12x - 12x^2 = 12x(1-x)$

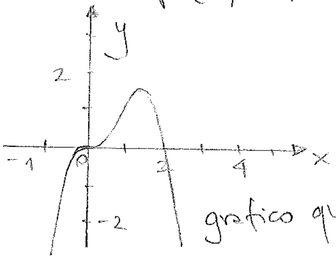
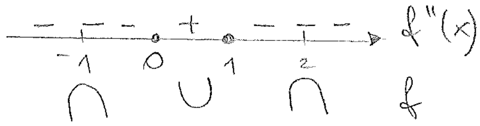


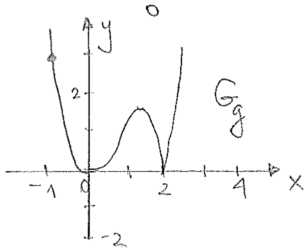
grafico qualitativo di f



□

ii) $\text{area}\, E = \int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^2 (2x^3 - x^4)\,dx = \left[\frac{\cancel{2}x^4}{\cancel{4}_2} - \frac{x^5}{5}\right]_0^2 = \frac{16}{2} - \frac{32}{5} = \underline{\underline{\frac{8}{5}}}.$

iii)



$\min_{x\in[-1,1]} g(x) = \underline{\underline{0}} \qquad \max_{x\in[-1,1]} g(x) = g(-1) = \underline{\underline{3}}.$

6) $C_{n,2} = 10 \iff \frac{n!}{(n-2)!\,2!} = 10 \iff \frac{n(n-1)\cancel{(n-2)!}}{\cancel{(n-2)!}\,2} = 10$

$\iff n^2 - n - 20 = 0 \iff (n-5)(n+4) = 0$

Il nr. di bambole nella cesta è $\underline{\underline{5}}$.

FILA (B)

2) i) • $\frac{e^{-x^2} e^{2|x|}}{e^{3x}} = 1 \iff e^{-x^2+2|x|-3x} = e^0$

$\iff -x^2 + 2|x| - 3x = 0$ (poiché $e^x \uparrow$).

Dobbiamo allora risolvere $\begin{cases} x \geq 0 \\ -x^2 + 2x - 3x = 0 \end{cases}$ o $\begin{cases} x < 0 \\ -x^2 - 2x - 3x = 0. \end{cases}$

Abbiamo $\begin{cases} x \geq 0 \\ -x(x+1) = 0 \end{cases}$ o $\begin{cases} x < 0 \\ -x(x+5) = 0 \end{cases} \implies \underline{\underline{S = \{-5, 0\}}}.$

• $\log(x^2-4) - \log(3x+6) \leq 0 \iff \begin{cases} x^2 - 4 > 0 \\ 3x + 6 > 0 \\ x^2 - 4 \leq 3x + 6 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} x < -2 \text{ o } x > 2 \\ x > -2 \\ x^2 - 3x - 10 \leq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x > 2 \\ (x-5)(x+2) \leq 0 \end{cases}$

$\implies \underline{\underline{S =]2, 5]}}.$

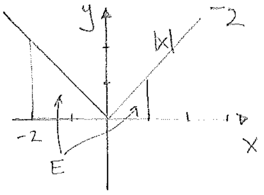
ii) vedi FILA (A), Es. 1 ii).

2) i) $\int_1^2 \frac{4x^4 - 2x^2 - 1}{x}\,dx = \int_1^2 \left[4x^3 - 2x - \frac{1}{x}\right] dx = \left[x^4 - x^2 - \log|x|\right]_1^2 =$

$= \left[(16 - 4 - \log 2) - (\cancel{1} - \cancel{1} - \cancel{\log 1})\right] = \underline{\underline{12 - \log 2}}.$

$$\int_{-2}^{1} (|x^2-1|+|x|)\,dx = \int_{-2}^{-1}(x^2-1)\,dx + \int_{-1}^{1}(-x^2+1)\,dx + \text{area } E$$

vedi disegno FILA (A)



$$= \left[\frac{x^3}{3}-x\right]_{-2}^{-1} + \left[-\frac{x^3}{3}+x\right]_{-1}^{1} + \frac{5}{2} = \frac{8}{3}+\frac{5}{2} = \underline{\frac{31}{6}}$$

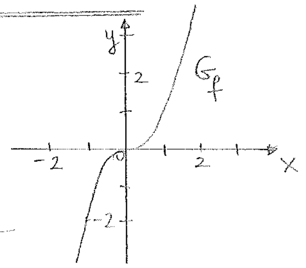
ii) $$-x_1 + \frac{x_3}{2!} - \frac{x_5}{3!} + \dots - \frac{x_{13}}{7!} = \underline{\sum_{n=1}^{7} (-1)^n \frac{x_{2n-1}}{n!}}.$$

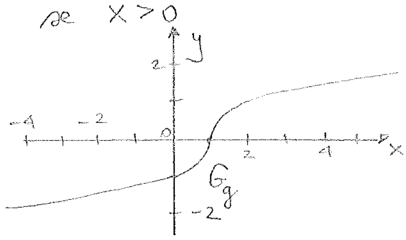
iii) $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} -2x^2 & \text{se } x \le 0 \\ x^2 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

$$g(x) = \sqrt[3]{x-1}$$

a)





b)
$$\left.\begin{array}{l} \lim_{h\to 0^-} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{-2h^2-0}{h} = 0 \\ \lim_{h\to 0^+} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{h^2-0}{h} = 0 \end{array}\right\} \text{ f è derivabile in } x=0 \text{ e } f'(0)=0.$$

c) g è iniettiva, essendo strettamente crescente. $\underline{g(\mathbb{R}) = \mathbb{R}}$,

d) $(fg)(2) = f(2)g(2) = 4 \cdot 1 = \underline{4}$;

$(f+g)(0) = f(0)+g(0) = 0+(-1) = \underline{-1}$; $(f \circ g)(0) = f(g(0)) = f(-1) = \underline{-2}$.

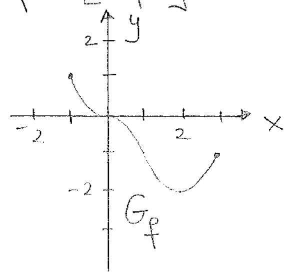
3) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3+2x-2$.

i) f è una funzione continua su $\mathbb{R}$ e quindi, in particolare, su $[0,1]$. Inoltre $f(0) = -2$ e $f(1) = 1$. Quindi, per il teorema di Zeusa degli zeri, $\exists x_0 \in]0,1[$ t.c. $f(x_0) = 0$.
Notiamo inoltre che $f(x)$ è la somma di due funz. strett. crescenti (x^3 e $2x-2$), ed è quindi strett. crescente (si può anche oss. che $f'(x) = 3x^2+2 > 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$ ed f è quindi strett. crescente).
Questo fatto ci garantisce l'unicità di x_0.

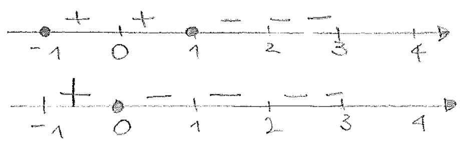
ii) Procediamo usando il metodo di bisezione.

Consideriamo il punto medio dell'intervallo $[0,1]$, ossia $a_1=\frac{1}{2}$. Si ha $f(a_1)=\frac{1}{8}+\cancel{2}\cdot\frac{1}{\cancel{2}}-2=-\frac{7}{8}<0$. Procediamo considerando il punto medio dell'intervallo $[\frac{1}{2},1]$, ossia $a_2=\frac{3}{4}$. Si ha $f(a_2)=\frac{27}{64}+\cancel{2}\cdot\frac{3}{\cancel{4}_2}-2$ $=-\frac{5}{64}$. Poniamo allora $[\tilde{a},\tilde{b}]=[\frac{3}{4},1]$ e possiamo asserire che $x_0\in[\frac{3}{4},1]$. ■

4) $f:[-1,3]\to\mathbb{R}$ e $F:[-1,3]\to\mathbb{R}$ $\quad F(x)=\int_{-1}^{x}f(t)\,dt$



i)

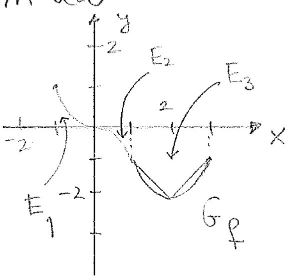


□

ii) F è crescente su $[-1,0]$ e decrescente su $[0,3]$

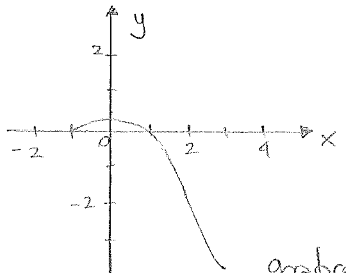
Risulta che $x=-1$, $x=3$ sono pt. di minimo locale per F, mentre $x=0$ è pt. di massimo locale per F. □

iii) Usando l'interpretazione geom. dell'integrale e la definizione di $F(x)$ si ha



$$\min_{x\in[-1,3]}F(x)=F(3)=\cancel{\text{area }E_1-\text{area }E_2}-\text{area }E_3$$
$$=-\text{area }E_3<-3.$$

iv) Poiché f è derivabile su $[-1,3]$, dal TFC segue $F''(x)=f'(x)$ su $[-1,3]$, quindi



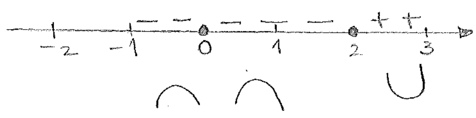
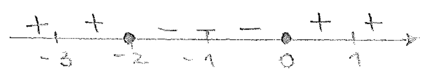


grafico qualitativo di F. ■

5) $\boxed{f(x)=x^3(2+x)}$ i) • $\operatorname{dom} f=\mathbb{R}$

• 

• $\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

- ∄ sono asintoti
- dom $f' = \mathbb{R}$ $\qquad f'(x) = 6x^2 + 4x^3 = 2x^2(3+2x)$

$x=0, \quad x = -3/2$

$- \; - \; - \; \circ \; + \; + \; \circ \; + \; + \; + \; + \quad f'(x)$
$\quad -2 \quad -1 \quad 0 \quad 1 \quad 2$
$\searrow \qquad \nearrow \qquad \nearrow \qquad f(x)$

Sono pr. critici per f

$x=0$ non è né pr. di max. loc.
né pr. di min. loc. e $f(0)=0$

$x=-3/2$ è pr. di min. loc. di f ; $f\left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{27}{8}\left(2-\frac{3}{2}\right) = -\frac{27}{16} > -2$

- dom $f'' = \mathbb{R}$ $\qquad f''(x) = 12x + 12x^2 = 12x(1+x)$

$+ \; + \; \circ \; - \; \circ \; + \; + \; + \; + \quad f''(x)$
$\quad -2 \quad -1 \quad 0 \quad 1 \quad 2$
$\cup \qquad \cap \qquad \cup \qquad f$

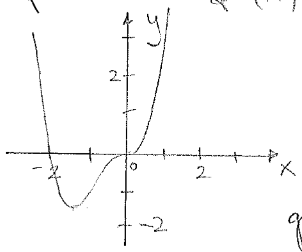
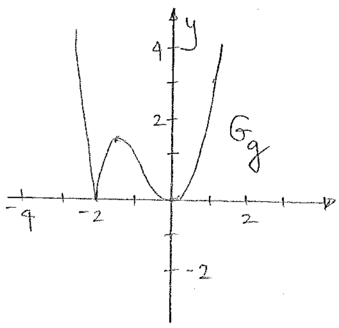


grafico qualitativo di f $\square$

ii) area di $E = \int_{-2}^{0} -f(x)\,dx = \int_{-2}^{0} \left[-2x^3 - x^4\right] dx = \left[-\frac{\cancel{2}^{1} x^4}{\cancel{4}_{2}} - \frac{x^5}{5}\right]_{-2}^{0} = \frac{16}{2} - \frac{32}{5} =$

$= \underline{\underline{\frac{8}{5}}}.$ $\square$

iii)



$\min_{x\in[-1,1]} g(x) = \underline{\underline{0}} \qquad \max_{x\in[-1,1]} g(x) = \underline{\underline{3}}.$ ■

6) $C_{n,2} = 15 \iff \frac{n!}{(n-2)!\,2!} = 15 \iff \frac{n(n-1)\cancel{(n-2)!}}{\cancel{(n-2)!}\,2} = 15$

$\iff n^2 - n - 30 = 0 \iff (n-6)(n+5) = 0$

Il nr. di bambole nella cesta è $\underline{\underline{6}}$. ■