Università di Trento – Dip. di Psicologia e Scienze Cognitive
CdL in Scienze e Tecniche di Psicologia Cognitiva
ESAME SCRITTO DI ANALISI MATEMATICA
a.a. 2015 - 2016 – Rovereto, 9 settembre 2016

FILA (A)

1) i) $A =$ " $\exists x, y \in \mathbb{R} : xy = 3, \ -x+y = 2$ ".

non $A =$ " $\forall x, y \in \mathbb{R}, \ xy \neq 3$ o $-x+y \neq 2$ ".

La proposizione <u>A è vera</u>: infatti $xy = 3$ e $-x+y=2 \iff$

$xy = 2$, e $y = 4+x \iff y = 2+x$ e $x(2+x) = 3$

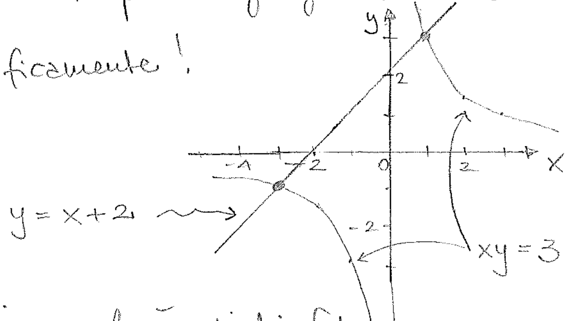
$\iff y = 2+x$ e $x^2+2x-3=0$

$\hookrightarrow x_{1/2} = \dfrac{-2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = \dfrac{-2\pm 4}{2} = \begin{cases} -3 \\ 1 \end{cases}$

Quindi $(x,y) = (1,3) \in A$ (ma anche $(x,y) = (-3,-1)$)

A tale risultato si poteva giungere anche direttamente (a occhio!)

oppure graficamente!



La proposizione non A è quindi falsa! $\square$

ii) $B =$ " $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} : xy = 3, \ -x+y = 2$ ".

La proposizione <u>B è falsa</u>, poiché per $x = 0 \ \nexists y \in \mathbb{R} : xy = 3.$ $\blacksquare$

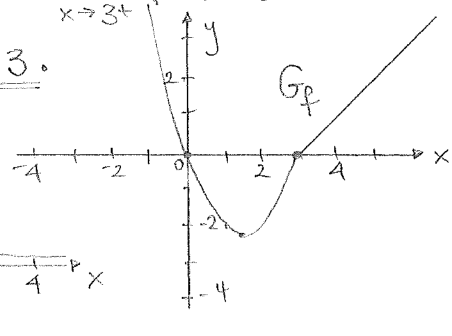
2) i) $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x & \text{se } x \leq 3 \\ x + a & \text{se } x > 3 \end{cases}$$

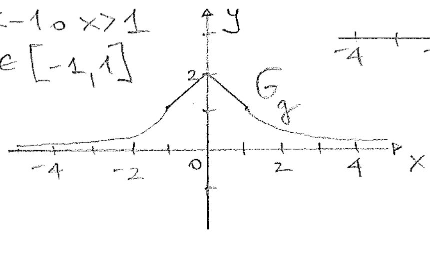
f è continua in $x = 3 \iff$

$$\lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^+} f(x) = f(3).$$

Ora $\lim_{x\to 3^-} f(x) = 9 - 9 = 0 = f(3)$, mentre $\lim_{x \to 3^+} f(x) = 3 + a$. Quindi f è continua in $x = 3$ se e solo se <u>$a = -3$</u>.



$$g(x) = \begin{cases} 1/x^2 & \text{se } x < -1 \text{ o } x > 1 \\ -|x| + 2 & \text{se } x \in [-1, 1] \end{cases}$$



$\square$

ii) $g(\mathbb{R}) = \underline{\underline{]0,2]}}$; $(f \circ g)(x) = \begin{cases} \left(\frac{1}{x^2}\right)^2 - 3\left(\frac{1}{x^2}\right) & \text{se } x<-1 \text{ o } x>1 \\ (-|x|+2)^2 - 3(-|x|+2) & \text{se } x \in [-1,1] \end{cases}$

nota: $g(x) \in \,]0,2] \;\; \forall x \in \mathbb{R}$

$$= \begin{cases} \frac{1}{x^4} - \frac{3}{x^2} & \text{se } x<-1 \text{ o } x>1 \\ +|x|^2 - |x| - 2 & \text{se } x \in [-1,1]. \end{cases}$$

3) i) $\mathcal{E}: \; 4x^2 + y^2 + 8x - 2y + 1 = 0$

$$4(x^2+2x) + y^2 - 2y + 1 = 0$$

$$4(x+1)^2 - 4 + (y-1)^2 - \cancel{1} + \cancel{1} = 0$$

$$\Rightarrow (x+1)^2 + \frac{(y-1)^2}{4} = 1 \qquad C = (-1,1) \qquad \begin{matrix} a=1 \\ b=2 \end{matrix}$$

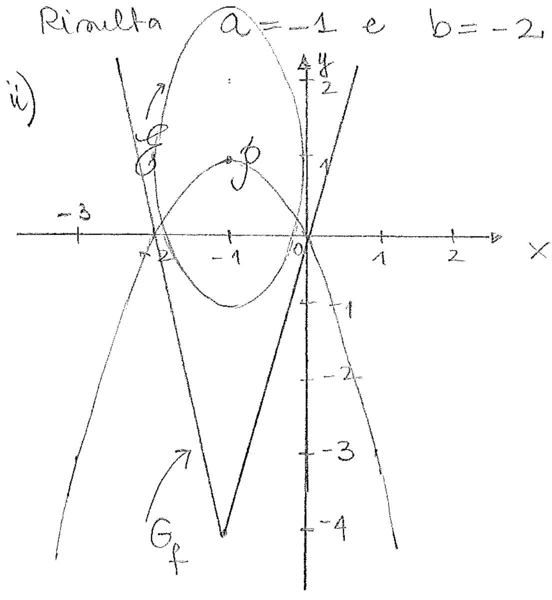
$y = ax^2+bx+c \ni (0,0) \Leftrightarrow c = 0$; quindi $y = ax^2+bx$.

Essendo il vertice di $\mathcal{P}$ nel pt. $(-1,1)$ e $\mathcal{P}$ passa per l'origine, anche il pt. $(-2,0) \in \mathcal{P}$ e quindi dobbiamo risolvere il sistema

$$\begin{cases} 1 = a - b & (\Leftarrow (-1,1) \in \mathcal{P}) \\ 0 = 4a - 2b & (\Leftarrow (-2,0) \in \mathcal{P}) \end{cases}$$

Risulta $a = -1$ e $b = -2$. $\qquad \mathcal{P}: \; \underline{\underline{y = -x^2 - 2x}}$.

ii)



iii) $\text{area } E = \int_{-2}^{0} \left(-x^2 - 2x - 4|x+1| + 4\right) dx$

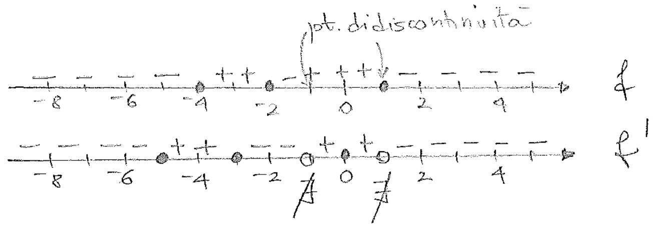
$$= 2\int_{-1}^{0} \left(-x^2 - 2x - 4(x+1) + 4\right) dx$$

$$= 2\int_{-1}^{0} \left(-x^2 - 6x\right) dx = 2\left[-\frac{x^3}{3} - 3x^2\right]_{-1}^{0}$$

$$= 2\left(-\frac{1}{3} + 3\right) = \underline{\underline{\frac{16}{3}}}.$$

4) i) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \underline{\underline{0}}$; $\lim_{x \to -1^-} f(x) = \underline{\underline{-\infty}}$; $\lim_{x \to -1^+} f(x) = \underline{\underline{1}}$;

$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \underline{\underline{+\infty}}$; $\lim_{x \to 1^+} f(x) = \underline{\underline{0}}$; $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \underline{\underline{-1}}$.

ii) 

iii) $x = -5$ pt. di min. loc. per f;

$x = -3$ pt. di max. loc. per f.

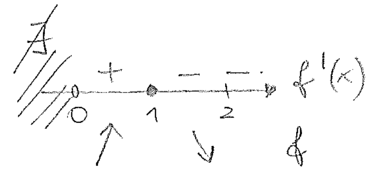
iv) $\underline{\underline{I =]-3, 1[}}$.

5) $\boxed{f(x) = -x + 1 + \log x}$

• $\mathrm{dom} f =]0, +\infty[$

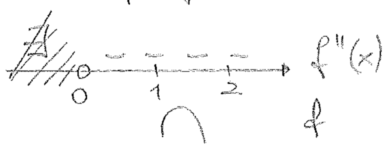
• $\lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$ $\quad$ $\underline{x = 0 \text{ asintoto verticale (da destra) per } f}$

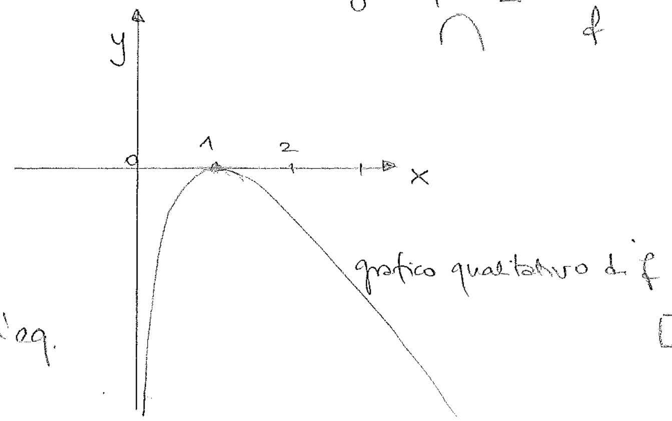
$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

• $\mathrm{dom} f' = \mathrm{dom} f$ $\quad f'(x) = -1 + \frac{1}{x} = \frac{-x+1}{x}$ 

$x = 1$ pt. critico per f

$f(1) = 0$ $\quad$ $x = 1$ pt. di max loc. stretto per f

• $\mathrm{dom} f'' = \mathrm{dom} f$ $\quad f''(x) = -1/x^2$ 



ii) se $k > 0$ $\nexists$ sono soluzioni dell'eq. $f(x) = k$;

se $k = 0$ $\exists$ una soluzione dell'eq. $f(x) = k$;

se $k < 0$ $\exists$ sono 2 soluzioni dell'eq. $f(x) = k$.

iii) $G(x) = -x + x \log x$ è deriv. su $]0, +\infty[$ e

$G'(x) = -1 + \log x + x \cdot \frac{1}{x} = \log x = g(x) \quad \forall x \in]0, +\infty[$.

iv) $$\int_1^3 f(x)\,dx = \int_1^3 [-x + 1 + \log x]\,dx = \int_1^3 (-x+1)\,dx + \int_1^3 \log x\,dx$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{uso pt. iii)}}}{=} \left[-\frac{x^2}{2} + x\right]_1^3 + \left[-x + x\log x\right]_1^3 = \left[\left(-\frac{9}{2} + 3\right) - \left(-\frac{1}{2} + 1\right)\right] +$$

$$+ \left[\left(-3 + 3\log 3\right) - \left(-1 + 1\cancel{\log 1}\right)\right]$$

$$= \underline{\underline{-4 + 3\log 3}}$$

6) i) $\sum_{k=1}^{3} C_{3,k} = C_{3,1} + C_{3,2} + C_{3,3}$ dove $C_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$, $1! = 0! = 1$

$= \frac{3!}{2!} + \frac{3!}{2!} + \frac{3!}{3!}$

$= 3 + 3 + 1 = \underline{7}$.

□

ii) $C_{n,2} + D_{n,2} = 30 \iff \frac{n!}{(n-2)!\,2!} + \frac{n!}{(n-2)!} = 30$

$\iff \frac{n(n-1)\cancel{(n-2)!}}{\cancel{(n-2)!}\,2} + \frac{n(n-1)\cancel{(n-2)!}}{\cancel{(n-2)!}} = 30$

$\iff 3n(n-1) - 60 = 0$

$\iff n^2 - n - 20 = 0 \iff (n-5)(n+4) = 0$

$\Rightarrow \underline{n = 5}$.

■

FILA (B)

1) i) $A =$ " $\exists x, y \in \mathbb{R}$: $\frac{x}{y} = 2$, $-x + y = 4$ ".

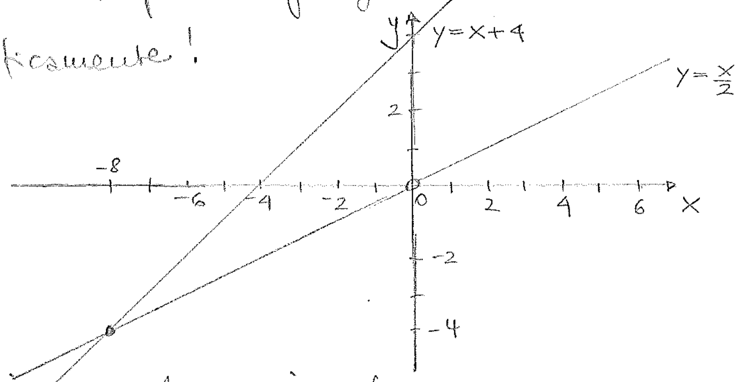
non $A =$ " $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $\frac{x}{y} \neq 2$ o $-x + y \neq 4$ ".

La proposizione A è vera: infatti $\frac{x}{y} = 2$ e $-x + y = 4$

$\iff y \neq 0$, $x = 2y$ e $-x + y = 4$. Si ottiene come soluzione

$y = -4$ e $x = -8$, ossia $(-8, -4) \in A$.

A tale risultato si poteva giungere anche direttamente (a occhio!) oppure graficamente!



La proposizione non A è quindi falsa.

□

ii) $B =$ " $\forall x \in \mathbb{R}$, $\exists y \in \mathbb{R}$: $\frac{x}{y} = 2$, $-x + y = 4$.

La proposizione B è banalmente falsa, poiché per $x = 0$ $\nexists y \in \mathbb{R}$: $\frac{x}{y} = 2$.

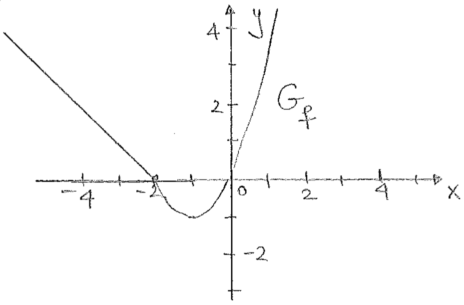
■

2) i) $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

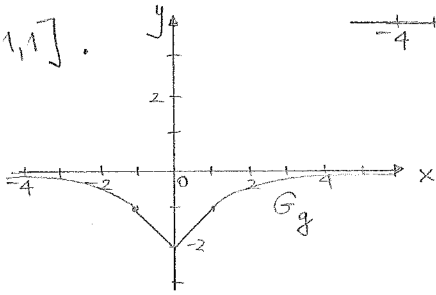
$$f(x) = \begin{cases} -x + a & \text{se } x < -2 \\ x^2 + 2x & \text{se } x \geq -2 \end{cases}$$

f è continua in $x = -2 \iff \lim_{x \to -2^-} f(x) = \lim_{x \to -2^+} f(x) = f(-2)$.

Ora $\lim_{x \to -2^-} f(x) = 2 + a$, mentre $\lim_{x \to -2^+} f(x) = 4 - 4 = 0 = f(-2)$. Quindi f è continua in $x = -2$ se e solo se $\underline{\underline{a = -2}}$.



$$g(x) = \begin{cases} -1/x^2 & \text{se } x < -1 \text{ o } x > 1 \\ |x| - 2 & \text{se } x \in [-1, 1]. \end{cases}$$



□

ii) $g(\mathbb{R}) = \underline{\underline{[-2, 0[}}$; $\quad (f \circ g)(x) = \begin{cases} \left(-\frac{1}{x^2}\right)^2 + 2\left(\frac{-1}{x^2}\right) & \text{se } x < -1 \text{ o } x > 1 \\ (|x|-2)^2 + 2(|x|-2) & \text{se } x \in [-1, 1] \end{cases}$

nota: $g(x) \in [-2, 0[\ \forall x \in \mathbb{R}$

$$= \begin{cases} 1/x^4 - \frac{2}{x^2} & \text{se } x < -1 \text{ o } x > 1 \\ |x|^2 - 2|x| & \text{se } x \in [-1, 1]. \end{cases}$$

■

3) i) $\mathcal{E} : \quad 4x^2 + y^2 - 8x + 2y + 1 = 0$

$$4(x^2 - 2x) + y^2 + 2y + 1 = 0$$

$$4(x-1)^2 - 4 + (y+1)^2 - \cancel{1} + \cancel{1} = 0$$

$$\Rightarrow \quad (x-1)^2 + \frac{(y+1)^2}{4} = 1 \qquad C = (1, -1) \qquad \begin{matrix} a = 1 \\ b = 2 \end{matrix}$$

$y = ax^2 + bx + c \ni (0,0) \iff c = 0$; quindi $y = ax^2 + bx$.

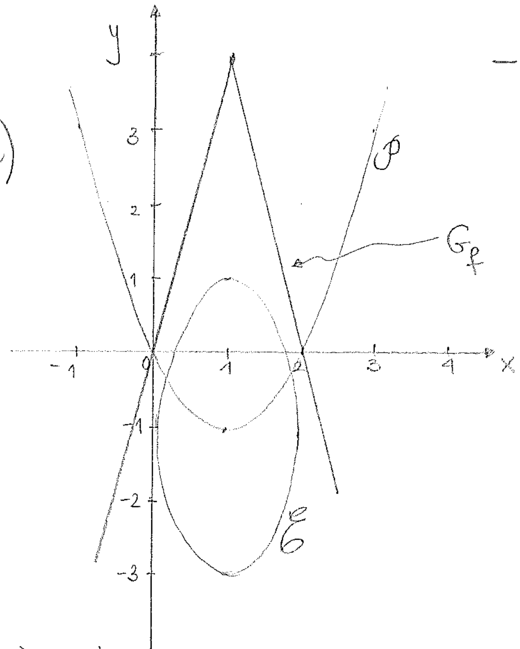
Essendo il vertice di $\mathcal{P}$ nel pt. $(1, -1)$ e $\mathcal{P}$ passa per l'origine, anche il punto $(2, 0) \in \mathcal{P}$ e quindi dobbiamo risolvere il sistema

$$\begin{cases} -1 = a + b & (\Leftarrow \ (1,-1) \in \mathcal{P}) \\ 0 = 4a + 2b & (\Leftarrow \ (2,0) \in \mathcal{P}). \end{cases}$$

Risulta $a = 1$ e $b = -2$. $\qquad \mathcal{P}: \ \underline{\underline{y = x^2 - 2x}}$.

□

ii)



iii) area $E = \int_0^2 \left(-4|x-1|+4 -x^2+2x\right) dx$

$= 2\int_0^1 \left(-4|x-1|+4 -x^2+2x\right) dx$

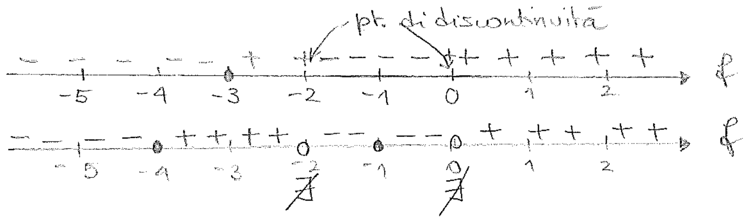
$= 2\int_0^1 \left(4x - x^2+2x\right) dx = 2\int_0^1 \left(-x^2+6x\right) dx$

$= \frac{16}{3}$.

4) i) $\lim_{x\to -\infty} f(x) = \underline{\underline{0}}$; $\lim_{x\to -2^-} f(x) = \underline{\underline{2}}$; $\lim_{x\to -2^+} f(x) = \underline{\underline{0}}$;

$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \underline{\underline{-\infty}}$; $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \underline{\underline{1}}$; $\lim_{x\to +\infty} f(x) = \underline{\underline{2}}$.

ii)



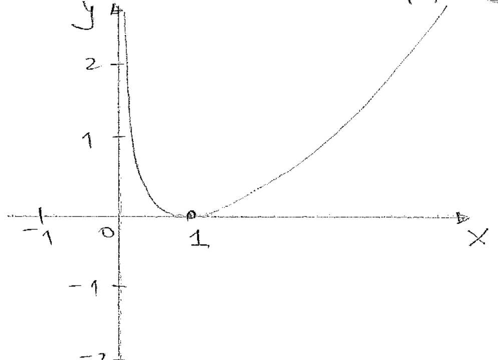
iii) $x=-4$ pt. di min. loc. per f ;

$x=-2$ pt. di max. loc. per f .

iv) $I = \underline{\underline{[-3, 0[}}$.

5) $\boxed{f(x) = x - 1 - \log x}$: questa funzione è $-f(x)$, con $f(x)$ la funzione definita in Es. 5, fila (A).

grafico qualitativo di f



ii) se $k<0$ $\nexists$ sono soluzioni dell'eq. $f(x)=k$;

se $k=0$ $\exists$ una soluzione dell'eq. $f(x)=k$;

se $k>0$ $\exists$ sono due soluzioni dell'eq. $f(x)=k$.

iii) vedi Es. 5 fila (A) iv) $\int_1^3 f(x)\,dx = 4 - 3\log 3$.

6) i) $\sum_{k=1}^{4} D_{4,k} = D_{4,1} + D_{4,2} + D_{4,3} + D_{4,4}$ dove $D_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!}$,

$= \frac{4!}{3!} + \frac{4!}{2!} + \frac{4!}{1!} + \frac{4!}{0!}$ $1! = 0! = 1$

$= 4 + 12 + 24 + 24 = \underline{\underline{64}}.$ $\square$

ii) $C_{n,2} + D_{n,2} = 63 \iff \frac{n!}{(n-2)!\,2!} + \frac{n!}{(n-2)!} = 63$

$\iff \frac{n(n-1)}{2} + n(n-1) = 63$

$\iff 3n(n-1) - 63 \cdot 2 = 0$

$\iff n^2 - n - 42 = 0 \iff (n-7)(n+6) = 0$

$\Rightarrow \underline{\underline{n = 7}}.$ $\blacksquare$