Università di Trento – Dip. di Psicologia e Scienze Cognitive
CdL in Scienze e Tecniche di Psicologia Cognitiva
ESAME SCRITTO DI ANALISI MATEMATICA
a.a. 2016-2017 — Rovereto, 3 febbraio 2017

FILA (A)

1) i) Siano $A(x)$ = " Il corso di nuoto x ha la durata di 10 ore " e

$B(x)$ = " Il corso di nuoto x ha la frequenza obbligatoria ".

Allora la proposizione " Ogni corso di nuoto ha la durata di 10 ore e la frequenza obbligatoria " si scrive in matematichese come:
" $\forall x$, $A(x)$ e $B(x)$ ". ☐

ii) " non $[\forall x, A(x) \text{ e } B(x)]$ " $\Leftrightarrow$ " $\exists x$: non $A(x)$ o non $B(x)$ ".

In italiano: " C'è almeno un corso di nuoto che non ha la durata di 10 ore oppure non ha la frequenza obbligatoria. " ☐

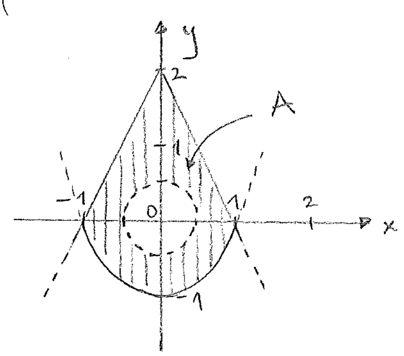
iii) A = " $\forall x \in \mathbb{N}, \exists y \in \mathbb{Z} : 2x + 4y = 3$ "

non A = " $\exists x \in \mathbb{N} : \forall y \in \mathbb{Z}, 2x+4y \neq 3$ ".

Oss. che $2x+4y=3 \Leftrightarrow 4y = -2x+3 \Leftrightarrow y = \frac{-2x+3}{4}$.

Notiamo che non è vero che $\forall x \in \mathbb{N}$, $y = \frac{-2x+3}{4} \in \mathbb{Z}$. Basta prendere $x = 0$, e si vede che $2x+4y=3 \Leftrightarrow y = \frac{3}{4}$ con $y \notin \mathbb{Z}$.
Quindi A è falsa e quindi non A è vera. ■

2) i) $\begin{cases} y \geq x^2 - 1 \\ y \leq -2|x| + 2 \\ x^2 + y^2 > \frac{1}{4} \end{cases}$



☐

ii) $y = k$ con $k < -1$ o $k > 2$. ☐

iii) $x^2 + y^2 = k^2$ con $0 < k \leq \frac{1}{2}$ o $k > 2$. ■

3) $f(x) = x^4 + 2x - 1$ è una funzione continua su $[0,1]$. Inoltre

$f(0) = -1 \;(<0)$, $f(1) = 2 \;(>0)$. Quindi per il teorema di esistenza degli zeri esiste $x_0 \in]0,1[\; : \; f(x_0) = 0$. Notiamo che esso è unico! Infatti $f(x)$ è la somma di due funzioni strett. crescenti su $[0,1]$ $\left(g_1(x) = x^4,\; g_2(x) = 2x-1\right)$ e quindi strett. crescente.
Consideriamo il pt. medio c_1 di $[0,1]$: $c_1 = \frac{1}{2}$. Abbiamo
$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{16} + \cancel{1} - \cancel{1} = \frac{1}{16} \;(>0)$. Possiamo asserire che $x_0 \in \left[0,\frac{1}{2}\right]$.
Consideriamo il punto medio c_2 di $\left[0,\frac{1}{2}\right]$: $c_2 = \frac{1}{4}$. Abbiamo
$f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{16^2} + \frac{1}{2} - 1 = \frac{1}{16^2} - \frac{1}{2} \;(<0)$. Possiamo asserire che $x_0 \in \left[\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right]$.
Poniamo allora $]\tilde{a},\tilde{b}[\, = \,]\frac{1}{4},\frac{1}{2}[$ e abbiamo quanto ricercato.

4) i) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1$; $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 2$; $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 1$; $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = +\infty$;

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = 1$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

ii) Se $k<0$ $\nexists$ soluzione dell'eq. $f(x) = k$;

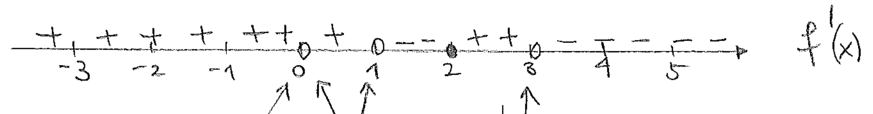
se $k = 0$ $\exists$ una " "

$0 < k < 1$ $\exists$ sono tre "

$1 \leq k \leq 2$ $\exists$ sono due "

$k > 2$ $\exists$ una soluzione ".

iii) $x = 2$ pt. di min. loc. (stretto) (e anche minimo assoluto).
$x = 0$, $x = 3$ pt. di max. loc. (stretto) per f.

iv) 

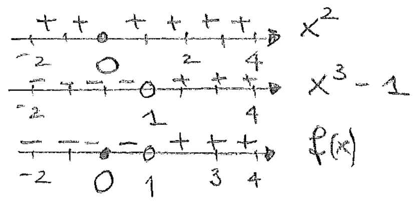
f non è continua / pt. angoloso

• esiste la derivata sinistra in 0 ed è positiva

• esiste la derivata destra in 1 ed è negativa.

5) i) $\boxed{f(x) = \dfrac{x^2}{x^3-1}}$

• $\operatorname{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

• 

• $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$ $\quad y=0$ asintoto orizzontale per f, per $x\to-\infty$

$\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to1^-} \dfrac{x^2}{\underbrace{(x^3-1)}_{\text{infinitesimo negativo per } x\to1^-}} = -\infty$ $\quad x=1$ asint. verticale (da sinistra) per f

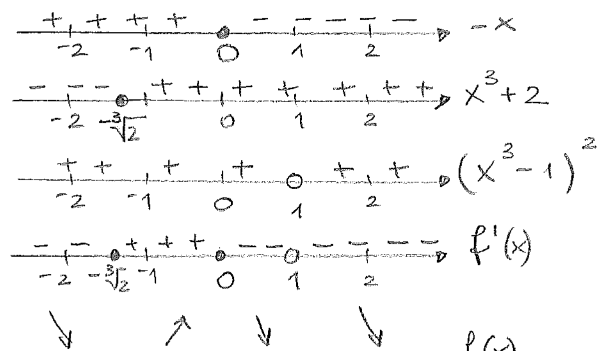
$\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to1^+} \dfrac{x^2}{\underbrace{(x^3-1)}_{\text{infinitesimo positivo per } x\to1^+}} = +\infty$ $\quad x=1$ asint. verticale (da destra) per f

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ $\quad y=0$ asintoto orizzontale per f, per $x\to+\infty$.

• $\operatorname{dom} f' = \operatorname{dom} f$ $\qquad f'(x) = \dfrac{2x(x^3-1) - x^2\cdot 3x^2}{(x^3-1)^2} = \dfrac{2x^4-2x-3x^4}{(x^3-1)^2}$

$$= \frac{-x(x^3+2)}{(x^3-1)^2}$$

$f'(x) = 0 \iff x=0$, $x = -\sqrt[3]{2}$ pt. critici per f



$x = -\sqrt[3]{2}$ pt. di min. loc stretto per f

$f(-\sqrt[3]{2}) = \dfrac{(-\sqrt[3]{2})^2}{-2-1} = \dfrac{(-\sqrt[3]{2})^2}{-3}$

$f(0) = 0$

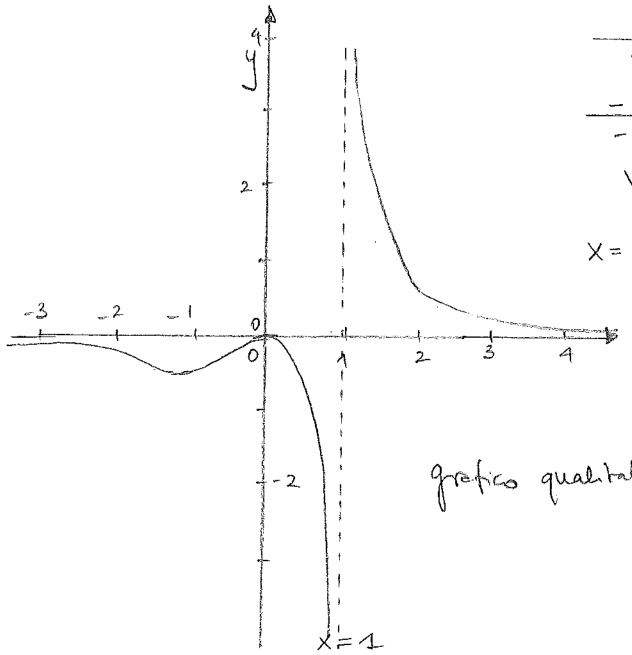


grafico qualitativo di f

□

ii) $f(\mathbb{R}\setminus\{1\}) = \underline{\underline{\mathbb{R}}}$.

□

iii) $y = f(0) + f'(0)(x-0)$ è l'eq. della retta tg. al grafico di f nel pt $(0, f(0)) = (0,0)$.

Poiché $f'(0) = 0$, si ha che $\underline{\underline{y=0}}$ è la retta tg. al grafico di f in $(0,0)$. $\blacksquare$

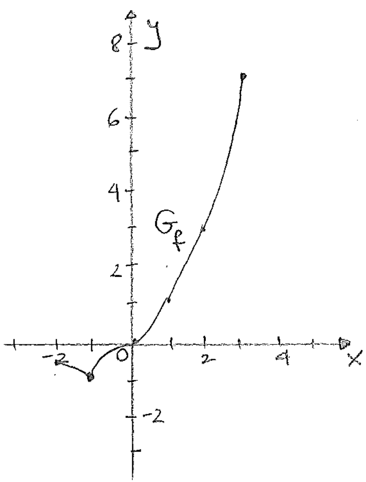
6) i) $F(x) = x\log(x^2-1) - \log(x-1) + \log(x+1) - 2x$

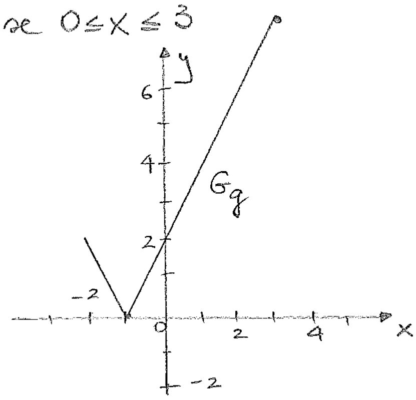
$$F'(x) = \log(x^2-1) + x \cdot \frac{2x}{x^2-1} - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} - 2$$
$$= \log(x^2-1) + \frac{2x^2-(x+1)+(x-1)-2(x^2-1)}{x^2-1} =$$
$$= \log(x^2-1) + \frac{\cancel{2x^2}\cancel{-x}\cancel{-1}\cancel{+x}\cancel{-1}\cancel{-2x^2}\cancel{+2}}{x^2-1} = \log(x^2-1) = f(x)$$

su $]1, +\infty[$. $\square$

$$\int_2^3 f(x)\,dx = \Big[F(x)\Big]_2^3 = F(3) - F(2) =$$
$$= (3\log 8 - \log 2 + \log 4 - 6) - (2\log 3 - \cancel{\log}1 + \log 3 - 4)$$
$$= 3\log 2^3 - \log 2 + \log 2^2 - 6 - 3\log 3 + 4 =$$
$$= 9\log 2 - \log 2 + 2\log 2 - 3\log 3 - 2 = \underline{\underline{10\log 2 - 3\log 3 - 2}}.$$

ii) a) $f, g : [-2, 3] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{se } -2 \le x \le -1 \\ -x^2 & \text{se } -1 < x < 0 \\ 2^x - 1 & \text{se } 0 \le x \le 3 \end{cases}$ $\quad g(x) = 2|x+1|$.





$\square$

b) $(f+g)(1) = f(1) + g(1) = 1 + 4 = \underline{\underline{5}}$; $\quad (fg)(-2) = f(-2)g(-2) = \left(-\frac{1}{2}\right)(2) = \underline{\underline{-1}}$;

$(g \circ f)(0) = g(f(0)) = g(0) = \underline{\underline{2}}$; $\quad (f \circ g)(0) = f(g(0)) = f(2) = \underline{\underline{3}}$. $\square$

c) $f|_{[-2,-1]}$ è decrescente; $f|_{[-1,3]}$ è crescente. $\blacksquare$

Fila (B)

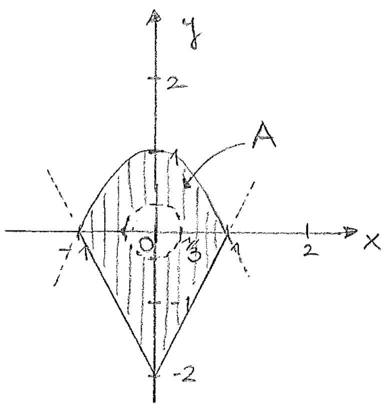
1) i) Siano $A(x)=$ "Il corso di tennis x ha la durata di 20 ore" e
$B(x)=$ "Il corso di tennis x ha la frequenza obbligatoria".

Allora la proposizione data si scrive in matematichese come:
"$\forall x$, $A(x)$ e $B(x)$". ☐

ii) "non $[\forall x, A(x)$ e $B(x)]$" $\Leftrightarrow$ "$\exists x$: non $A(x)$ o non $B(x)$".
In italiano: "C'è almeno un corso di tennis che non ha la durata di 20 ore oppure non ha la frequenza obbligatoria." ☐

iii) $A=$ "$\forall x\in\mathbb{Z}, \exists y\in\mathbb{Q} : 2x+4y=3$".
non $A=$ "$\exists x\in\mathbb{Z} : \forall y\in\mathbb{Q},\ 2x+4y\neq 3$".
Oss. che $2x+4y=3 \Leftrightarrow 4y=3-2x \Leftrightarrow y=\frac{3-2x}{4}$.
Notiamo che preso $x\in\mathbb{Z}$ qualsiasi, $y=\frac{3-2x}{4}\in\mathbb{Q}$ e vale ovviam. $2x+4y=3$. Quindi A è vera, non A è falsa ■

2) i) $\begin{cases} y\leq -x^2+1 \\ y\geq 2|x|-2 \\ x^2+y^2>1/9 \end{cases}$



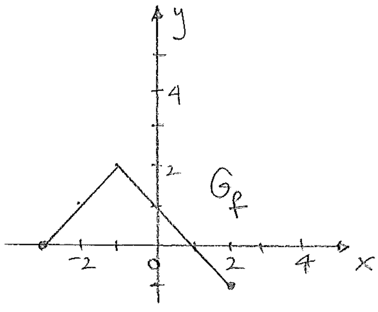
☐

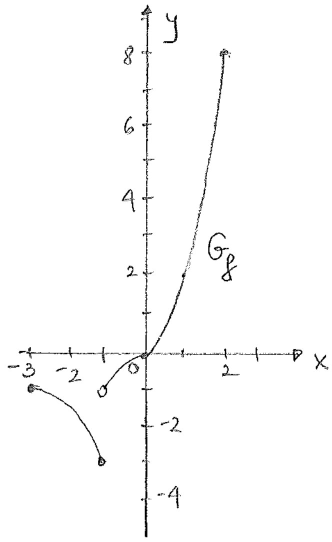
ii) $x=k$ con $k<-1$ o $k>1$. ☐

iii) $x^2+y^2=k^2$ con $0<k\leq\frac{1}{3}$ o $k>2$. ■

3) i) vedi Es. 6) i) Fila (A). ☐

ii) a) $f,g : [-3,2]\to\mathbb{R}$ $\quad f(x)=-|x+1|+2$ $\quad g(x)=\begin{cases}\frac{3}{x} & \text{se } -3\leq x\leq -1 \\ -x^2 & \text{se } -1<x<0 \\ 3^x-1 & \text{se } 0\leq x\leq 2.\end{cases}$





b) $(f+g)(1) = f(1)+g(1) = 0+2 = \underline{\underline{2}}$;

$(fg)(-2) = f(-2)\,g(-2) = 1\cdot\left(-\frac{3}{2}\right) = \underline{\underline{-\frac{3}{2}}}$;

$(f\circ g)(0) = f(g(0)) = f(0) = \underline{\underline{1}}$;

$(g\circ f)(0) = g(f(0)) = g(1) = \underline{\underline{2}}$. ☐

c) $g|_{[-3,-1]}$ è decrescente; $g|_{[-1,2]}$ è crescente. ■

4) i) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -1$; $\lim_{x\to0^-} f(x) = 1$; $\lim_{x\to0^+} f(x) = +\infty$; $\lim_{x\to1^-} f(x) = 0$;

$\lim_{x\to1^+} f(x) = 1$; $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 2$. ☐

ii) Se $k\le -1$, $\nexists$ soluzione dell'eq. $f(x)=k$;

se $-1<k\le 0$, $\exists$ una soluzione " ;

$0<k<1$, $\exists$ sono due soluzioni " ;

$k=1$, $\exists$ sono quattro soluzioni " ;

$1<k<2$, $\exists$ sono quattro soluzioni " ;

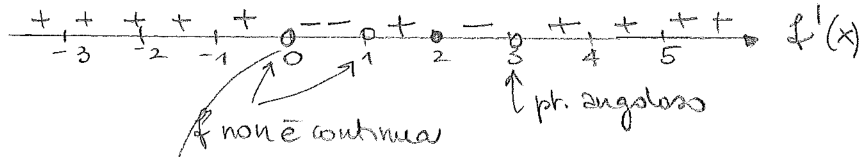
$k=2$, $\exists$ sono due soluzioni " ;

$k>2$, $\exists$ una soluzione " . ☐

iii) $x=2$ pt. di max. loc. (stretto) per f ;

$x=3$ pt. di min. loc. (stretto) per f. ☐

iv)

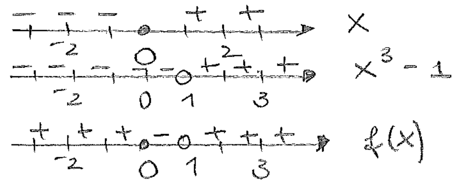


• esiste la derivata sinistra in 0 ed è positiva

• esiste la derivata destra in $x=1$ ed è positiva. ■

5) i) $\boxed{f(x)=\frac{x}{x^3-1}}$

• $\text{dom} f = \mathbb{R}\setminus\{1\}$

• 

• $\lim_{x\to-\infty} f(x)=0$ $\quad y=0$ asintoto orizzontale per f, per $x\to-\infty$.

$\lim_{x\to1^-} f(x) = \lim_{x\to1^-} \frac{x}{\underbrace{x^3-1}_{\text{infinitesimo neg. per } x\to1^-}} = -\infty$ $\quad x=1$ asint. verticale (da sinistra) per f;

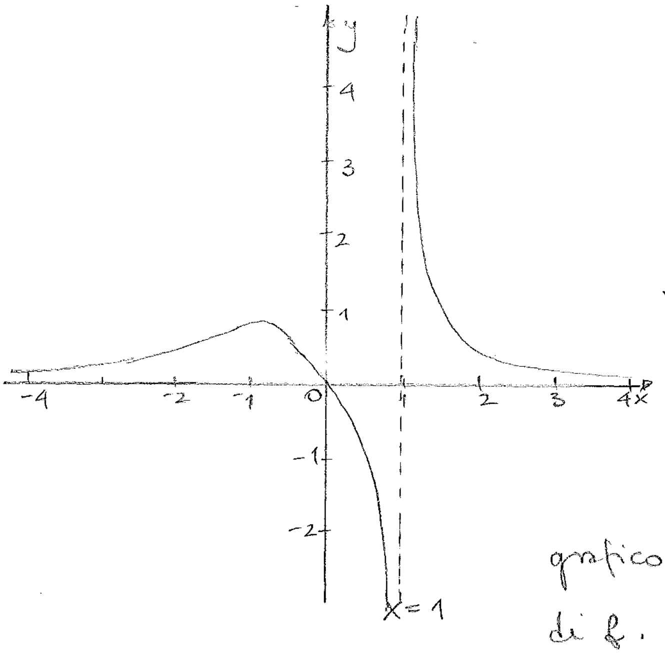
$\lim_{x\to1^+} f(x) = \lim_{x\to1^+} \frac{x}{\underbrace{x^3-1}_{\text{infinitesimo positiv. per } x\to1^+}}$ $\quad x=1$ asint. verticale (da destra) per f

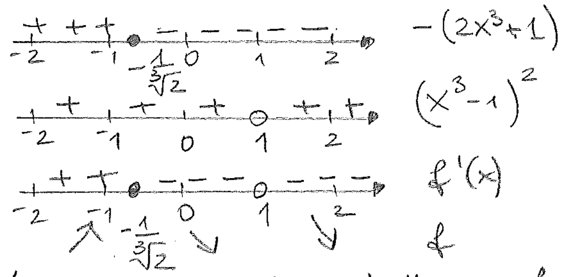
$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ $\quad y=0$ asintoto orizzontale per f, per $x\to+\infty$.

• $\text{dom} f' = \text{dom} f$ $\quad f'(x) = \frac{(x^3-1) - x(3x^2)}{(x^3-1)^2} = \frac{-2x^3-1}{(x^3-1)^2}$

$$= \frac{-(2x^3+1)}{(x^3-1)^2}$$

$f'(x)=0 \iff x = -\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ pt. critico per f.





$x = -\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ pt. di max. loc. stretto per f

$f\left(-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right) = \frac{-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}}{-\frac{1}{2}-1} = \frac{2\sqrt[3]{2}}{3} \sim 0.8$

grafico qualitativo di f.

$\square$

ii) $f(\mathbb{R}\setminus\{1\}) = \mathbb{R}$. $\square$

iii) $y = f(0) + f'(0)(x-0)$ è l'eq. della retta tg. al grafico di f nel pt. $(0, f(0)) = (0,0)$. Poiché $f'(0) = -1$, si ha che

$\underline{y = -x}$ è la retta tg. al grafico di f in $(0,0)$. $\blacksquare$

6) $f(x)=x^4-2x-1$ è una funzione continua su $[-1,0]$.
Inoltre $f(-1)=2$ (>0), $f(0)=-1$ (<0). Quindi per il teorema di esistenza degli zeri esiste $x_0\in\,]-1,0[\; : f(x_0)=0$.
Notiamo che esso è unico! Infatti $f(x)$ è la somma di due funz. strett. decrescenti su $[-1,0]$ ($g_1(x)=x^4$ e $g_2(x)=-2x-1$) e quindi strett. decrescente. Consideriamo il pt. medio c_1 di $[-1,0]$: $c_1=-\frac{1}{2}$. Abbiamo $f(-\frac{1}{2})=\frac{1}{16}+2-1=\frac{1}{16}+1$ (>0). Possiamo asserire che $x_0\in[-\frac{1}{2},0]$. Consideriamo il pt. medio c_2 di $[-\frac{1}{2},0]$: $c_2=-\frac{1}{4}$. Abbiamo $f(-\frac{1}{4})=\frac{1}{16^2}+\frac{1}{2}-1=\frac{1}{16^2}-\frac{1}{2}$ (<0). Possiamo quindi asserire che $x_0\in[-\frac{1}{2},-\frac{1}{4}]$. Poniamo allora $]\tilde{a},\tilde{b}[\,=\,]-\frac{1}{2},-\frac{1}{4}[$ e abbiamo quanto ricercato.

■