

Università di Trento - Dip. di Psicologia e Scienze Cognitive
 CdL in Scienze e Tecniche di Psicologia Cognitiva
 SECONDA PROVA INTERMEDIA DI ANALISI MATEMATICA
 a.a. 2015-2016 - Rovereto, 11 gennaio 2016

FILA (A)

$$1) \bullet (\log_2 4) \log(x+2) - \log(x+5) \leq \log(-x)$$

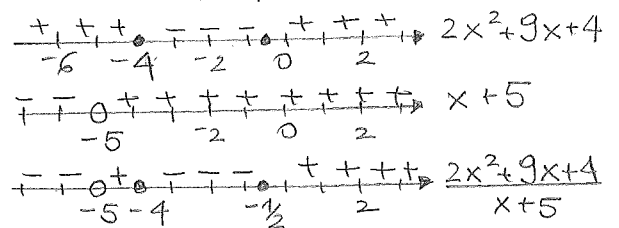
$$\Leftrightarrow 2 \log(x+2) - \log(x+5) \leq \log(-x)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x+2 > 0 \\ x+5 > 0 \\ -x > 0 \\ \log \frac{(x+2)^2}{x+5} \leq \log(-x) \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < x < 0 \\ \frac{(x+2)^2}{x+5} \leq -x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2 < x < 0 \\ \frac{x^2+4x+4+x^2+5x}{x+5} \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < x < 0 \\ \frac{2x^2+9x+4}{x+5} \leq 0 \end{cases}$$

$$\text{Ora } 2x^2+9x+4=0 \Leftrightarrow x_{1/2} = \frac{-9 \pm \sqrt{81-32}}{4} = \frac{-9 \pm 7}{4}$$

$$= \begin{cases} -\frac{1}{2} \\ -4 \end{cases}$$



Quindi

$$\begin{cases} -2 < x < 0 \\ \frac{2x^2+9x+4}{x+5} \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < x < 0 \\ x < -5 \text{ o } -4 < x \leq -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \underline{S =]-2, -\frac{1}{2}]}. \quad \square$$

$$\bullet 3|x+1| - x^2 < -1 \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 \geq 0 \\ 3(x+1) - x^2 < -1 \end{cases} \text{ o } \begin{cases} x+1 < 0 \\ -3(x+1) - x^2 < -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ 3x+3-x^2 < -1 \end{cases} \text{ o } \begin{cases} x < -1 \\ -3x-3-x^2 < -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x^2-3x-4 > 0 \end{cases} \text{ o } \begin{cases} x < -1 \\ x^2+3x+2 > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x < -1 \text{ o } x > 4 \end{cases} \text{ o } \begin{cases} x < -1 \\ x < -2 \text{ o } x > -1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \underline{S =]-\infty, -2[\cup]4, +\infty[}. \quad \blacksquare$$

$$2) i) \cdot \int_1^2 \left(\frac{1}{2x+1} + x^3 \right) dx = \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{2}{2x+1} dx + \int_1^2 x^3 dx = \frac{1}{2} \left[\log |2x+1| \right]_1^2 + \left[\frac{x^4}{4} \right]_1^2$$

$$= \frac{1}{2} (\log 5 - \log 3) + \left(\frac{16}{4} - \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{2} \log \frac{5}{3} + \frac{15}{4} = \log \sqrt{\frac{5}{3}} + \frac{15}{4}$$

□

• $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+2x^2)}{x^k}$ $k \in \{1, 2\}$:

per $k=1$ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+2x^2)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\log(1+2x^2)}{2x^2} \right) \cdot 2x = \underline{0}$.

per $k=2$ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+2x^2)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\log(1+2x^2)}{2x^2} \right) \cdot 2 = \underline{2}$.

□

ii) $\log\left(\frac{3}{4}\right) + \log\left(\frac{8}{9}\right) + \dots + \log\left(\frac{120}{121}\right) = \sum_{n=2}^{11} \log\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)$. □

iii) $\sum_{n=2}^8 \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) + \left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} \right) + \dots + \left(\frac{1}{\sqrt{8}} - \frac{1}{\sqrt{9}} \right)$

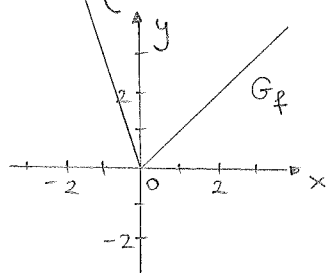
$$= \underline{\underline{\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{3}}}$$

■

3) $f(x) = |2x| - x$; si ha $f(x) = \begin{cases} 2x - x & \text{se } x \geq 0 \\ -2x - x & \text{se } x < 0 \end{cases}$, ossia

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -3x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

i)



ii) f è continua in $x=0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) = 0.$$

f non è derivabile in $x=0$:

Infatti $\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-3h - 0}{h} = -3$

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h - 0}{h} = 1$$

$x=0$ pt. angoloso per f .

iii) $\min_{[-1,2]} f = \underline{0}$ $\underline{x=0}$ pt. di minimo per f su $[-1,2]$;

$\max_{[-1,2]} f = \underline{3}$ $\underline{x=-1}$ pt. di massimo per f su $[-1,2]$. □

iv) f non soddisfa le ipotesi del teorema di Fermat degli est. su $[-1,2]$,

poiché $f(-1) > 0$ e $f(2) > 0$. ■

4) $\boxed{f(x) = x^2 e^x}$ su $\mathbb{R}$.

i) $F(x) = (x^2 - 2x + 2)e^x$ è una primitiva di f se $F'(x) = f(x)$.

On $F'(x) = (\cancel{2x} - \cancel{2})e^x + (x^2 - \cancel{2x} + \cancel{2})e^x = x^2 e^x = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad \square$

ii) L'insieme di tutte le primitive di f è dato da $\{F(x) + C, C \in \mathbb{R}\}$.

Sia $G(x) = F(x) + C$. Richiedendo che $G(0) = 4$ m'ha

$4 = F(0) + C \Leftrightarrow 4 = 2 + C \Leftrightarrow C = 2$. Quindi la primitiva

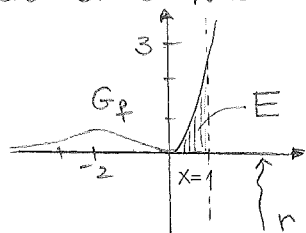
ricercata è $G(x) = F(x) + 2$. □

iii) Dobbiamo calcolare $f'(x)$; $f'(x) = 2xe^x + x^2 e^x$ e m'ha

$f'(0) = 0$. Quindi l'eq. della retta tg r è data da $y = 0$. □

iv) Basta osservare che $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ e $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Un breve studio di $f(x)$ permette di disegnare il grafico di f .

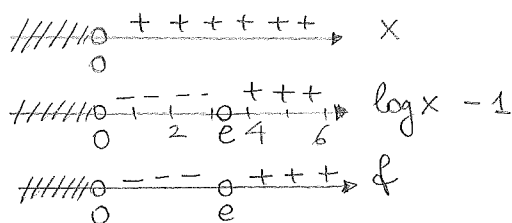


$$\begin{aligned} \text{area } E &= \int_0^1 f(x) dx = [F(x)]_0^1 \\ &= (1 - \cancel{2} + 2)e - 2e^0 = \underline{e - 2}. \end{aligned}$$

5) $\boxed{f(x) = \frac{x}{\log x - 1}}$

• $\text{dom } f = \{x \in \mathbb{R} : x > 0, \log x \neq 1\} =$
 $]0, +\infty[\setminus \{e\}$

• segno di f



• $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \underline{0}$

$\lim_{x \rightarrow e^-} f(x) = \underline{-\infty}$

$x = e$ asintoto verticale (da sinistra) per f

$\lim_{x \rightarrow e^+} f(x) = \underline{+\infty}$

$x = e$ asintoto verticale (da destra) per f

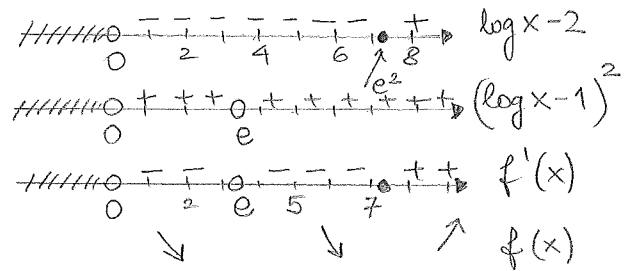
$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \underline{+\infty}$.

• $\text{dom } f' = \text{dom } f$

$$f'(x) = \frac{(\log x - 1) - 1 \cdot \frac{1}{x}}{(\log x - 1)^2} = \frac{\log x - 2}{(\log x - 1)^2}$$

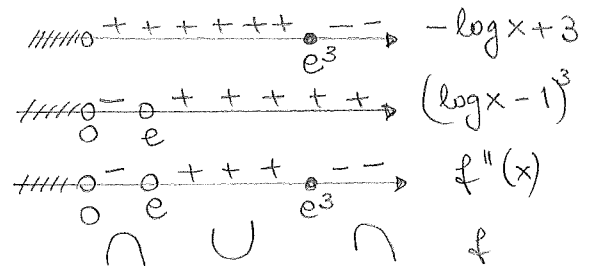
$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \log x = 2 \Leftrightarrow x = e^2 \text{ pt. critico per } f$$

$$\underline{f(e^2) = e^2}$$

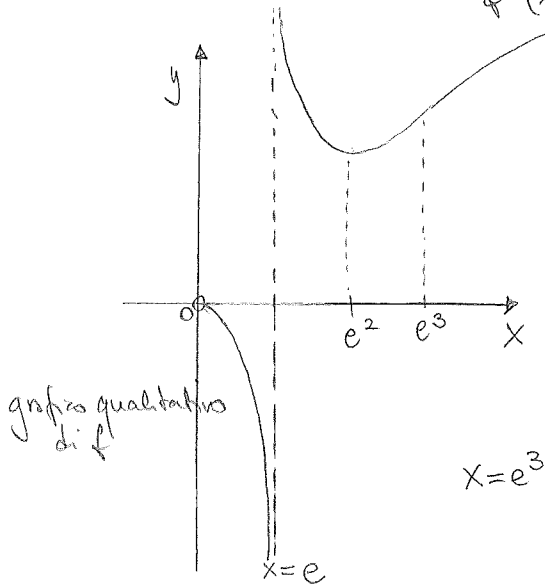


• $\text{dom } f'' = \text{dom } f$

$$f''(x) = \frac{\frac{1}{x} (\log x - 1)^2 - (\log x - 2) 2 (\log x - 1) \cdot \frac{1}{x}}{(\log x - 1)^4} = \frac{-\log x + 3}{x (\log x - 1)^3}$$



$x = e^3$ pt. di flesso per f .



ii) $\text{dom } f(|x|) = \mathbb{R} \setminus \{-e, 0, e\}$

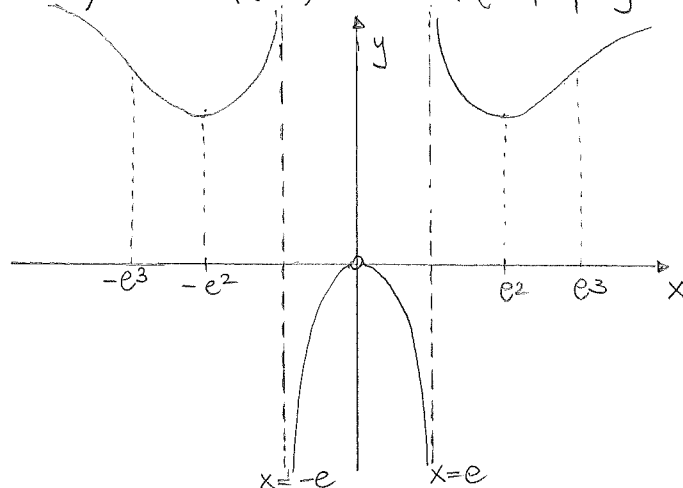


grafico qualitativo di $f(|x|)$

6) $D_{4,3} = \frac{4!}{(4-3)!} = \underline{\underline{4!}}$

FILA (B)

1) • $(\log_3 9) \log(x+2) - \log(x+5) > \log(-x)$

$\Leftrightarrow 2 \log(x+2) - \log(x+5) > \log(-x)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -2 < x < 0 \\ \frac{2x^2+9x+4}{x+5} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < x < 0 \\ -5 < x < -4 \text{ o } x > -\frac{1}{2} \end{cases}$

FILA (A)
Es. 1

$\Rightarrow S =]-\frac{1}{2}, 0[.$

□

• $3|x+1| - x^2 \geq -1 \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 \geq 0 \\ 3(x+1) - x^2 \geq -1 \end{cases} \text{ o } \begin{cases} x+1 < 0 \\ -3(x+1) - x^2 \geq -1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x^2 - 3x - 4 \leq 0 \end{cases} \text{ o } \begin{cases} x < -1 \\ x^2 + 3x + 2 \leq 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ -1 \leq x \leq 4 \end{cases} \text{ o } \begin{cases} x < -1 \\ -2 \leq x \leq -1 \end{cases}$

$\Rightarrow S = [-2, 4].$

■

2) i) • $\int_1^3 \left(x^3 - \frac{1}{3x+1}\right) dx = \int_1^3 x^3 dx - \frac{1}{3} \int_1^3 \frac{3}{3x+1} dx = \left[\frac{x^4}{4}\right]_1^3 - \frac{1}{3} \left[\log|3x+1|\right]_1^3$
 $= \left(\frac{81}{4} - \frac{1}{4}\right) - \frac{1}{3} (\log 10 - \log 4) = \frac{20}{1} - \frac{1}{3} \log \frac{10}{4} =$
 $= 20 - \frac{1}{3} \log \frac{5}{2} = \underline{20 - \log^3 \sqrt{\frac{5}{2}}}.$

□

• $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{2x^2} - 1}{x^k} \quad k \in \{2, 3\} :$

per $k=2$ $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{2x^2} - 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{e^{2x^2} - 1}{2x^2} \right) \cdot 2 = \underline{2}.$

per $k=3$ $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{2x^2} - 1}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{e^{2x^2} - 1}{2x^2} \right) \cdot \frac{2}{x} = \underline{+\infty}.$

□

ii) $e^{-\frac{3}{4}} + e^{-\frac{8}{9}} + \dots + e^{-\frac{143}{144}} = \sum_{n=2}^{12} e^{-\frac{n^2-1}{n^2}}.$

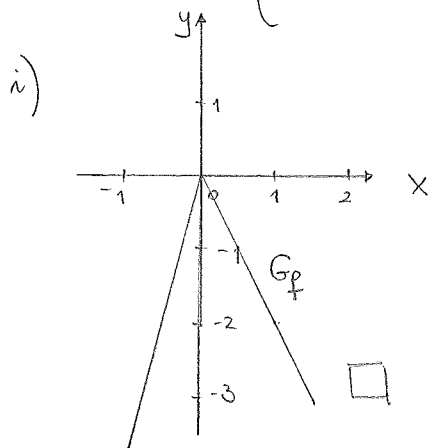
□

iii) $\sum_{n=1}^7 \left(\frac{1}{\sqrt[3]{n}} - \frac{1}{\sqrt[3]{n+1}} \right) = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \right) + \left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}} - \frac{1}{\sqrt[3]{3}} \right) + \dots + \left(\frac{1}{\sqrt[3]{7}} - \frac{1}{\sqrt[3]{8}} \right) =$
 $= 1 - \frac{1}{2} = \underline{\frac{1}{2}}.$

■

3) $\boxed{f(x) = x - 13|x|}$; mi ha $f(x) = \begin{cases} x - 3x & \text{se } x \geq 0 \\ x + 3x & \text{se } x < 0 \end{cases}$, ossia

$$f(x) = \begin{cases} -2x & \text{se } x \geq 0 \\ 4x & \text{se } x < 0 \end{cases}.$$



ii) f è continua in $x=0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) = 0.$$

f non è derivabile in $x=0$:

Infatti $\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{4h - 0}{h} = 4$

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{-2h - 0}{h} = -2$$

$x=0$ è un pr. angoloso puf

iii) $\min_{[-3,1]} f = \underline{-12}$ $x=-3$ pr. di minimo per f in $[-3,1]$;

$\max_{[-3,1]} f = \underline{0}$ $x=0$ pr. di massimo per f in $[-3,1]$. □

iv) f non soddisfa le ipotesi del teorema di Fermat degli est. in $[-3,1]$, poiché $f(-3) < 0$ e $f(1) < 0$. ■

4) $\boxed{f(x) = x^2 e^{-x}}$ su $\mathbb{R}$.

i) $F(x) = (-x^2 - 2x - 2)e^{-x}$ è una primitiva di f se $F'(x) = f(x)$.

on $F'(x) = (-2x - 2)e^{-x} - (-x^2 - 2x - 2)e^{-x} = x^2 e^{-x} = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$. □

ii) L'insieme di tutte le primitive di f è dato da $\{F(x) + c, c \in \mathbb{R}\}$.

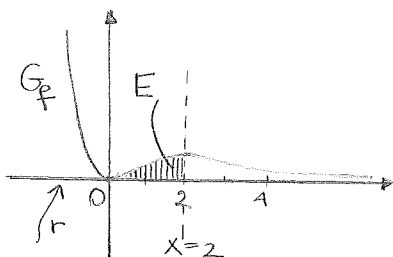
Sia $G(x) = F(x) + c$. Richiedendo che $G(0) = 4$ mi ha

$4 = F(0) + c \Leftrightarrow 4 = -2 + c \Leftrightarrow c = 6$. Quindi la primitiva ricercata è $G(x) = F(x) + 6$. □

iii) Dobbiamo calcolare $f'(x)$; $f'(x) = 2xe^{-x} - x^2 e^{-x}$ e mi ha $f'(0) = 0$.
Quindi l'eq. della retta tg r è data da $y = 0$. □

iv) Basta osservare che $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ e $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Un breve studio di funzioni permette di disegnare il grafico di f .



$$\begin{aligned} \text{area } E &= \int_0^2 f(x) dx = \left[F(x) \right]_0^2 = \\ &= (-4 - 4 - 2)e^{-2} - (-2e^0) = \\ &= \underline{\underline{-10e^{-2} + 2}}. \end{aligned}$$

5) $f(x) = \frac{x}{1 - \log x}$

i) Nota: questa funzione coincide con la funzione data nell'Es.5 della fila (A) cambiata di segno. Quindi il grafico di f è dato da

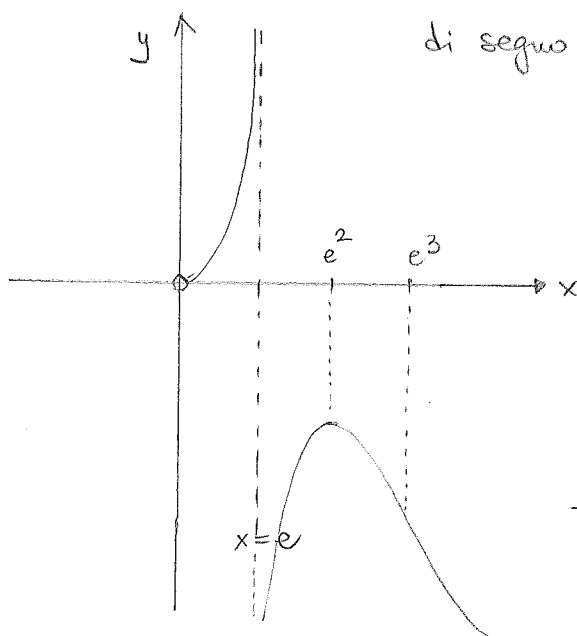
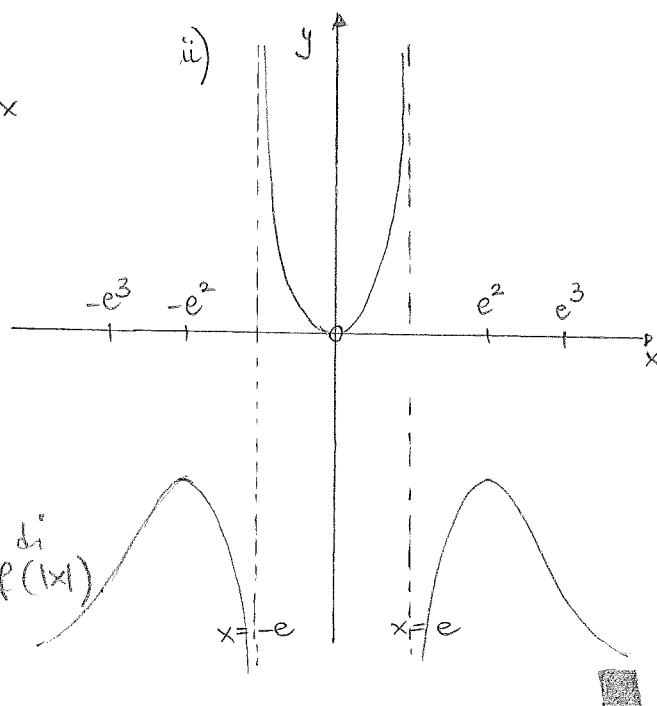


grafico qualitativo di $f(|x|)$



6) $D_{6A} = \frac{6!}{(6-4)!} = \underline{\underline{\frac{6!}{2!}}}$