

Università di Trento - Dip. di Psicologia e Scienze Cognitive
CdL in Scienze e Tecniche di Psicologia Cognitiva
SECONDA PROVA INTERMEDIA DI ANALISI MATEMATICA
a.a. 2015-2016 - Rotereto, 18 dicembre 2015.

FILA (A)

$$1) \log(x^2 + 2|x|) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 2|x| > 0 \\ x^2 + 2|x| < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ x^2 + 2|x| - 1 < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x^2 + 2x - 1 < 0 \end{cases} \quad \circ \quad \begin{cases} x < 0 \\ x^2 - 2x - 1 < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ -1 - \sqrt{2} < x < -1 + \sqrt{2} \end{cases} \quad \circ \quad \begin{cases} x < 0 \\ 1 - \sqrt{2} < x < 1 + \sqrt{2} \end{cases}$$



$$]0, -1 + \sqrt{2}[$$



$$]1 - \sqrt{2}, 0[$$

$$\Rightarrow S =]1 - \sqrt{2}, -1 + \sqrt{2}[\setminus \{0\}$$



$$e^{-x^2+2x} - \frac{e^{-x}}{e^{x-3}} > 0 \Leftrightarrow e^{-x^2+2x} > e^{-x-x+3} \Leftrightarrow e^{-x^2+2x} > e^{-2x+3}$$

$$\Leftrightarrow -x^2+2x > -2x+3 \Leftrightarrow x^2-4x+3 < 0$$

$e^x \uparrow$

$$\Rightarrow S =]1, 3[$$



$$2) i) \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{(x+4)^{\rightarrow 2}}{(|x|-2)^{\text{infinitesimo positivo}}} = \boxed{+\infty};$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x+4}{(|x|-2)^{\text{infinitesimo negativo}}} = \boxed{-\infty};$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + e^{\alpha x}}{3x^2} = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + e^{-x}}{3x^2} = \boxed{\frac{1}{3}} & \text{se } \alpha = -1 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 1}{3x^2} = \boxed{\frac{1}{3}} & \text{se } \alpha = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + e^x}{3x^2} = \boxed{+\infty} & \text{se } \alpha = 1. \end{cases}$$



$$ii) \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} e^{x^2} dx - \int_{\frac{1}{5}}^{\frac{1}{4}} e^{x^2} dx + \dots - \int_{\frac{1}{25}}^{\frac{1}{24}} e^{x^2} dx = \sum_{n=1}^{12} (-1)^{n+1} \int_{\frac{1}{2n+1}}^{\frac{1}{2n}} e^{x^2} dx$$



$$iii) n=2 \quad \sum_{k=1}^2 k \stackrel{?}{=} \frac{2(2+1)}{2} \Leftrightarrow 1+2 \stackrel{?}{=} 2+1 \quad \checkmark$$

$$n=3 \quad \sum_{k=1}^3 k \stackrel{?}{=} \frac{3(3+1)}{2} \Leftrightarrow 1+2+3 \stackrel{?}{=} \frac{3 \cdot 4}{2} \quad \checkmark$$

$$n=4 \quad \sum_{k=1}^4 k \stackrel{?}{=} \frac{4(4+1)}{2} \Leftrightarrow 1+2+3+4 \stackrel{?}{=} \frac{4 \cdot 5}{2} \quad \checkmark$$

$$3) f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = \begin{cases} x^3 - x^2 & \text{se } x \leq 1 \\ ax + b & \text{se } x > 1. \end{cases}$$

$$i) f \text{ \u00e9 continua in } x=1 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1)$$

$$\Leftrightarrow 0 = a + b.$$

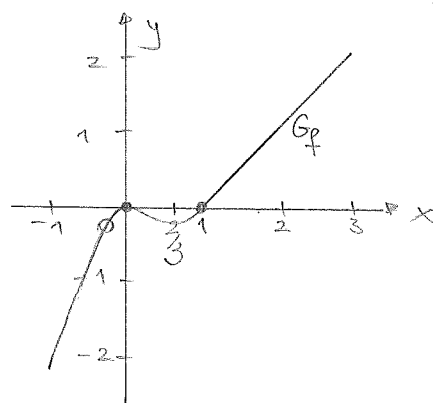
$$\text{Osserviamo che } f'(x) = \begin{cases} 3x^2 - 2x & \text{se } x < 1 \\ a & \text{se } x > 1. \end{cases}$$

$$\text{Quindi } \lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (3x^2 - 2x) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) = a.$$

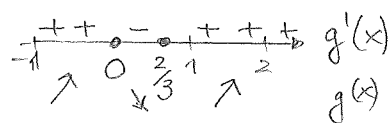
Allora b) \u00e8 soddisfatta se e solo se $a=1$; da a) segue $1+b=0$, ossia $b=-1$. \(\square\)

$$ii) f(x) = \begin{cases} x^3 - x^2 & \text{se } x \leq 1 \\ x - 1 & \text{se } x > 1. \end{cases}$$



$$g(x) = x^3 - x^2 = x^2(x-1)$$

$$g'(x) = 3x^2 - 2x = x(3x-2)$$



$x=0$ pt. di max. loc. stretto per g ; $g(0)=0$

$x=2/3$ pr. di min. loc. stretto per g ; $g(2/3) = \frac{8}{27} - \frac{4}{9} = -\frac{4}{27}$. \(\square\)

$$\text{Infine } \int_0^2 |f(x)| dx = \int_0^1 (x^2 - x^3) dx + \int_1^2 (x-1) dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right]_0^1 + \left[\frac{x^2}{2} - x \right]_1^2$$

$$= \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \left(2 - 2 \right) - \left(\frac{1}{2} - 1 \right) = \frac{1}{12} + \frac{1}{2} = \frac{7}{12}.$$

$$4) F(x) = \int_0^x (t^3 - t^2 + t - 1) dt.$$

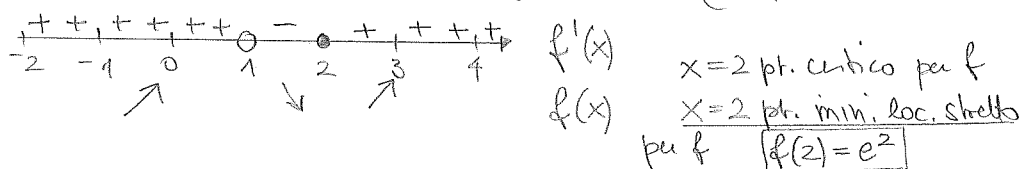
i) x_0 \u00e8 pt. critico di $F(x)$ se $F'(x_0)=0$. Ora $F'(x) = x^3 - x^2 + x - 1$

per il teorema fond. del calcolo integrale. Dobbiamo provare che la funzione $f(x) = 2x^3 - x^2 + x - 1$ ha un solo zero in $]0, 1[$.
 f è una funzione continua su $[0, 1]$; inoltre $f(0) = -1$, $f(1) = 1$.
 Allora per il teorema di esistenza degli zeri $\exists x_0 \in]0, 1[: f(x_0) = 0$.
 Osserviamo che $f'(x) = 6x^2 - 2x + 1 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$, quindi f è strett. crescente su $\mathbb{R}$, e in particolare su $[0, 1]$, implicando l'unicità di x_0 .

ii) Procediamo usando il metodo di bisezione: consideriamo il pt. medio di $[0, 1]$, ossia $c_1 = \frac{1}{2}$. Abbiamo $f(c_1) = 2 \cdot \frac{1}{8} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$; possiamo asserire che $x_0 \in]\frac{1}{2}, 1[$. Consideriamo il pt. medio di $[\frac{1}{2}, 1]$, ossia $c_2 = \frac{3}{4}$. Abbiamo $f(c_2) = 2 \cdot \frac{27}{64} - \frac{9}{16} + \frac{3}{4} - 1 = \frac{9}{32} - \frac{1}{4} = \frac{1}{32}$.
 Possiamo allora affermare che il pt. x_0 (zero per f , pt. critico per F)
 $\in]\frac{1}{2}, \frac{3}{4}[$ che è un intervallo soddisfacente quanto richiesto. ■

- 5) i) $f(x) = \frac{e^x}{|x-1|}$
- $\text{dom } f = \mathbb{R} \setminus \{1\} =]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[$
 - segno f : f è sempre positiva!
 - $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ $y=0$ asintoto orizz. per f , per $x \rightarrow -\infty$.
 - $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$ $x=1$ asintoto verticale per f (da destra e da sinistra).
 - $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.
 - f è continua in $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, poiché composizione e rapporto di funz. continue.
 - $f(x) = \begin{cases} \frac{e^x}{1-x} & \text{se } x < 1 \\ \frac{e^x}{x-1} & \text{se } x > 1 \end{cases}$

$$\text{dom } f' = \mathbb{R} \setminus \{1\} \quad f'(x) = \begin{cases} \frac{e^x(1-x) + e^x}{(1-x)^2} = \frac{e^x(2-x)}{(1-x)^2} & \text{se } x < 1 \\ \frac{e^x(x-1) - e^x}{(x-1)^2} = \frac{e^x(x-2)}{(x-1)^2} & \text{se } x > 1 \end{cases}$$



-4-

$$\text{dom } f'' = \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

$$f''(x) = \begin{cases} \frac{(e^x(2-x) - e^x)(1-x)^2 + e^x(2-x)2(1-x)}{(1-x)^3} & \text{se } x < 1 \\ \frac{(e^x(x-2) + e^x)(x-1)^2 - e^x(x-2)2(x-1)}{(x-1)^3} & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{e^x(1-x)(1-x) + e^x(2-x)2}{(1-x)^3} & \text{se } x < 1 \\ \frac{e^x(x-1)(x-1) - e^x(x-2)2}{(x-1)^3} & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{e^x(x^2 - 4x + 5)}{(1-x)^3} & \text{se } x < 1 \\ \frac{e^x(x^2 - 4x + 5)}{(x-1)^3} & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

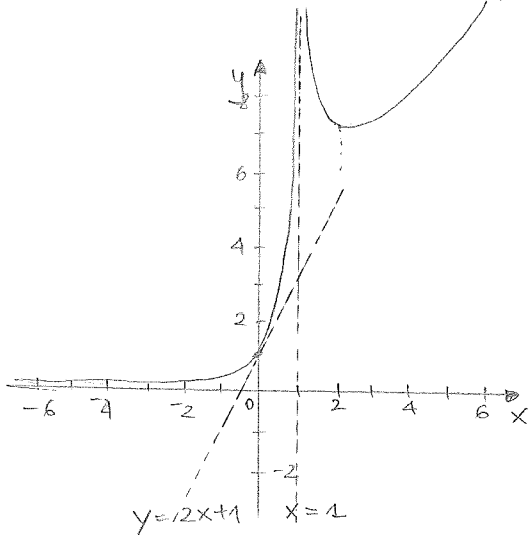
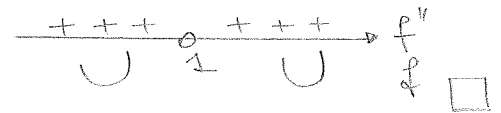


grafico qualitativo di f

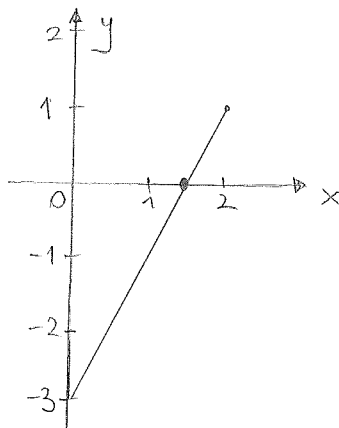


ii) $f(0) = 1$ $f'(0) = 2$

$\Rightarrow y = 1 + 2(x - 0)$ è l'eq. della retta tg. al grafico di f nel pt. $(0, 1)$.

$\Rightarrow \boxed{y = 2x + 1}$.

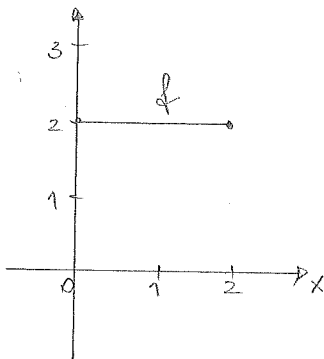
6) i)



Due esempi semplici:

$f(x) = 2x - 3$

ii)



Basta considerare $f(x) = 2 \quad \forall x \in [0, 2]$.

FILA (B)

$$1) \log(x^2 + |x|) < 0 \iff \begin{cases} x^2 + |x| > 0 \\ x^2 + |x| < 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ x^2 + |x| - 1 < 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x > 0 \\ x^2 + x - 1 < 0 \end{cases} \quad \circ \quad \begin{cases} x < 0 \\ x^2 - x - 1 < 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x > 0 \\ -\frac{1-\sqrt{5}}{2} < x < \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \end{cases} \quad \circ \quad \begin{cases} x < 0 \\ \frac{1-\sqrt{5}}{2} < x < \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

$$\Downarrow \\]0, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}[$$

$$\Downarrow \\ \frac{1-\sqrt{5}}{2} < x < 0$$

$$\Rightarrow S =]\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}[\setminus \{0\}.$$

□

$$e^x \cdot e^{-x^2+3x} - \frac{1}{e^{x-4}} < 0 \iff e^{-x^2+4x} < e^{-x+4}$$

$$\begin{matrix} \iff \\ e^x \uparrow \end{matrix} \quad -x^2+4x < -x+4 \iff x^2-5x+4 > 0$$

$$\Rightarrow S =]-\infty, 1[\cup]4, +\infty[.$$

■

$$2) i) \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{(x+3)^{\rightarrow 1}}{(2-|x|)^{\rightarrow 1}} = \boxed{-\infty};$$

infinitesimo negativo

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{(x+3)^{\rightarrow 1}}{(2-|x|)^{\rightarrow 1}} = \boxed{+\infty};$$

infinitesimo positivo

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^2 + e^{\alpha x}}{4x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^2 + (e^{-x})^{\rightarrow 0}}{4x^2} = \boxed{-\frac{1}{4}} \quad \text{se } \alpha = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^2 + 1}{4x^2} = \boxed{-\frac{1}{4}} \quad \text{se } \alpha = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^2 + e^x}{4x^2} = \boxed{+\infty} \quad \text{se } \alpha = 1.$$

□

$$ii) -\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} 2^{x^2} dx + \int_{\frac{1}{5}}^{\frac{1}{4}} 2^{x^2} dx - \dots + \int_{\frac{1}{29}}^{\frac{1}{28}} 2^{x^2} dx = \boxed{\sum_{n=1}^{14} (-1)^n \int_{\frac{1}{2n+1}}^{\frac{1}{2n}} 2^{x^2} dx}.$$

□

$$iii) n=3 \quad \sum_{k=1}^3 k^2 \stackrel{?}{=} \frac{3(3+1)(2 \cdot 3 + 1)}{6} \iff \underbrace{1+4+9}_{14} \stackrel{?}{=} \frac{3 \cdot 4 \cdot 7}{6} = 14 \quad \checkmark$$

$$n=4 \quad \sum_{k=1}^4 k^2 \stackrel{?}{=} \frac{4(4+1)(2 \cdot 4 + 1)}{6} \iff \underbrace{1+4+9+16}_{30} \stackrel{?}{=} \frac{4 \cdot 5 \cdot 9}{6} = 30 \quad \checkmark$$

■

$$3) f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} x^3 - x & \text{se } x \leq 1 \\ ax + b & \text{se } x > 1. \end{cases}$$

$$i) f \text{ \u00e9 continua in } x=1 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1)$$

$$\Leftrightarrow 0 = a + b.$$

$$\text{osserviamo che } f'(x) = \begin{cases} 3x^2 - 1 & \text{se } x < 1 \\ a & \text{se } x > 1. \end{cases}$$

$$\text{Quindi } \lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (3x^2 - 1) = 2$$

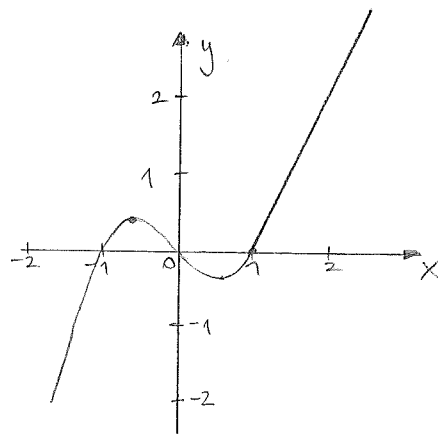
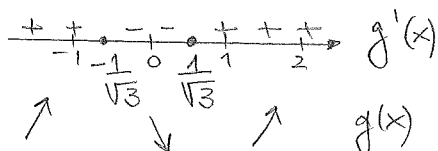
$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) = a.$$

Allora b) \u00e9 soddisfatta se e solo se $a=2$; da a) segue $2+b=0$,
 ossia $b=-2$. $\square$

$$ii) f(x) = \begin{cases} x^3 - x & \text{se } x \leq 1 \\ 2x - 2 & \text{se } x > 1. \end{cases}$$

$$g(x) = x^3 - x = x(x^2 - 1)$$

$$g'(x) = 3x^2 - 1$$



$$x = -\frac{1}{\sqrt{3}} \text{ pt. di max. loc. stretto per } g; g\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{1}{3\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{2}{3\sqrt{3}}$$

$$x = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ pt. di min. loc. stretto per } g; g\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{3\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{2}{3\sqrt{3}} \quad \square$$

$$\text{Infine } \int_0^2 |f(x)| dx = \int_0^1 (x - x^3) dx + \int_1^2 (2x - 2) dx =$$

$$= \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} \right]_0^1 + \left[x^2 - 2x \right]_1^2 = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) + (4 - 4) - (1 - 2)$$

$$= \frac{1}{4} + 1 = \boxed{\frac{5}{4}}. \quad \blacksquare$$

$$4) F(x) = \int_0^x (t^3 - t^2 + 3t - 1) dt$$

$$ii) x_0 \text{ \u00e9 pt. critico di } F(x) \text{ se } F'(x_0) = 0. \text{ Ora } F'(x) = x^3 - x^2 + 3x - 1$$

per il teorema fond. del calcolo integrale. Dobbiamo provare che la funzione $f(x) = x^3 - x^2 + 3x - 1$ ha un solo zero in $]0,1[$.

f è una funzione continua su $[0,1]$; inoltre $f(0) = -1$, $f(1) = 2$.

Allora grazie al teorema di esistenza degli zeri $\exists x_0 \in]0,1[: f(x_0) = 0$.

Osserviamo che $f'(x) = 3x^2 - 2x + 3 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$, quindi f è strett. crescente su $\mathbb{R}$, e in particolare su $[0,1]$, garantendo così l'unicità di x_0 .

ii) Procediamo usando il metodo di bisezione: consideriamo il pt. medio dell'intervallo $[0,1]$, ossia $c_1 = \frac{1}{2}$. Abbiamo $f(c_1) = \frac{1}{8} - \frac{1}{4} + \frac{3}{2} - 1 = \frac{3}{8}$; possiamo affermare che $x_0 \in]0, \frac{1}{2}[$. Consideriamo il pt. medio di $[0, \frac{1}{2}]$,

ossia $c_2 = \frac{1}{4}$. Abbiamo $f(c_2) = \frac{1}{64} - \frac{1}{16} + \frac{3}{4} - 1 = -\frac{19}{64}$.

Potremmo allora affermare che il pt. x_0 (zero per f , punto critico per F) $\in]\frac{1}{4}, \frac{1}{2}[$, che è un intervallo soddisfacente quanto desiderato.



5) i) $f(x) = \frac{e^x}{|x+1|}$ • $\text{dom } f = \mathbb{R} \setminus \{-1\} =]-\infty, -1[\cup]-1, +\infty[$.

• segno f : f è sempre positiva!

• $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ $y=0$ asintoto orizzontale per f , per $x \rightarrow -\infty$.

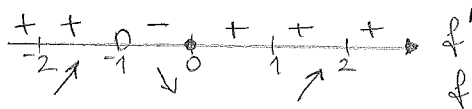
$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = +\infty$ $x=-1$ asintoto verticale per f (da destra e da sinistra).

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

• f è continua in $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$, poiché composizione e rapporto di funz. continue.

• $f(x) = \begin{cases} \frac{e^x}{-(x+1)} & \text{se } x < -1 \\ \frac{e^x}{x+1} & \text{se } x > -1. \end{cases}$

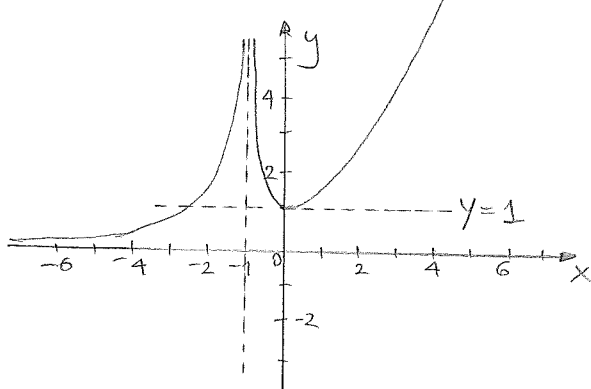
• $\text{dom } f' = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ $f'(x) = \begin{cases} \frac{e^x(-x-1) - e^x(-1)}{(-x-1)^2} = \frac{-xe^x}{(-x-1)^2} & \text{se } x < -1 \\ \frac{e^x(x+1) - e^x}{(x+1)^2} = \frac{xe^x}{(x+1)^2} & \text{se } x > -1 \end{cases}$



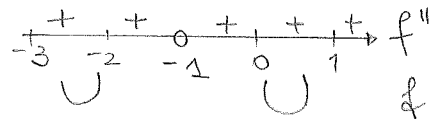
$x=0$ pt. critico; $x=0$ pt. di min. loc. stretto per f , $\boxed{f(0)=1}$.

• dom $f'' = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

$$f''(x) = \begin{cases} \frac{(-e^x - xe^x)(-x-1)^2 - xe^x \cdot 2(-x-1)}{(-x-1)^3} & \text{se } x < -1 \\ \frac{(e^x + xe^x)(x+1)^2 - xe^x \cdot 2(x+1)}{(x+1)^3} & \text{se } x > -1 \end{cases}$$



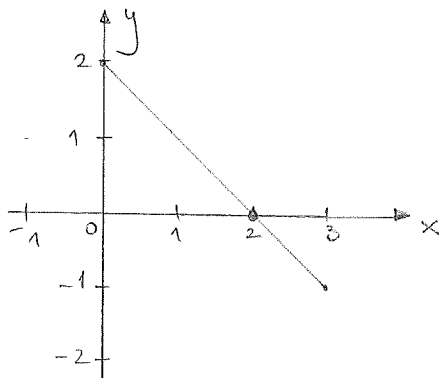
$$= \begin{cases} \frac{e^x(x^2+1)}{(-x-1)^3} & \text{se } x < -1 \\ \frac{e^x(x^2+1)}{(x+1)^3} & \text{se } x > -1 \end{cases}$$



ii) $f(0)=1$ $f'(0)=0$

$\boxed{y=1}$ è l'eq. della retta tg. al grafico di f nel pt. $(0, 1)$. □

6) i)

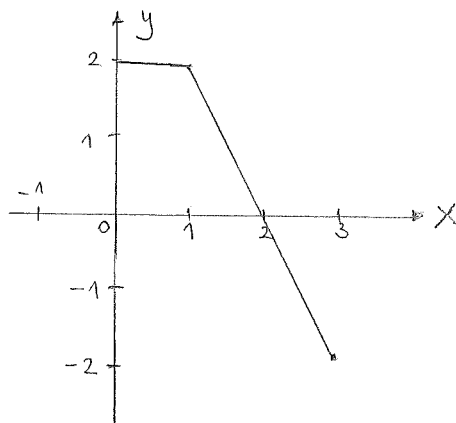


Due esempi semplici:

$$f(x) = -x + 2$$

□

ii)



$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ -2x + 4 & \text{se } 1 < x \leq 3. \end{cases}$$

■