

COGNOME _____

NOME _____

MATRICOLA

--	--	--	--	--	--

NON SCRIVERE QUI

A

1	2	3	4	5	6

UNIVERSITÀ DI TRENTO — DIP. DI PSICOLOGIA E SCIENZE COGNITIVE

CdL IN SCIENZE E TECNICHE DI PSICOLOGIA COGNITIVA

ESAME SCRITTO DI ANALISI MATEMATICA

A.A. 2016-2017 — ROVERETO, 13 GENNAIO 2017

Riempite immediatamente questo foglio scrivendo in stampatello cognome, nome e numero di matricola. Scrivete cognome e nome (in stampatello) su ogni foglio a quadretti. Il tempo massimo per svolgere la prova è di **DUE ORE E MEZZA**.

È obbligatorio consegnare sia il testo, sia tutti i fogli ricevuti; al momento della consegna, inserite tutti gli altri fogli, compreso quello con il testo, dentro uno dei fogli a quadretti.

Potete usare solo il vostro materiale di scrittura e il vostro materiale di studio. Non usate il colore rosso.

1) Siano dati gli insiemi

$$A = \{x \in \mathbb{R} : \frac{|x-1|}{x^2-2x-3} < 0\}; \quad B = \{x \in \mathbb{R} : e^{x^2-3x} \geq \frac{1}{e^{4x}}\}.$$

i) Determinate A e B e rappresentateli sulla retta reale. Dite se sono intervalli.

ii) Determinate $A \cup B$ e $A \cap B$.

iii) Dite se A e B sono insiemi limitati. Rappresentate graficamente $A \times B$.

2) Siano $f, g : [-1, 3] \rightarrow \mathbb{R}$ le funzioni definite da

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x+1} & \text{se } -1 \leq x < 0 \\ 2^x & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ x+1 & \text{se } 1 < x \leq 3, \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} |x-1| - 1 & \text{se } x \in [-1, 3] \setminus [0, 2] \\ -(x-1)^2 + 1 & \text{se } x \in [0, 2]. \end{cases}$$

i) Rappresentate graficamente f e g .

ii) Motivate l'iniettività di f . Determinate $f([-1, 3])$. Rappresentate graficamente la funzione inversa $f^{-1} : f([-1, 3]) \rightarrow [-1, 3]$.

iii) Determinate il minimo e il massimo (risp. i punti di minimo e di massimo) di g .

iv) Rappresentate, nei rispettivi domini, i grafici delle funzioni

$$x \mapsto |g(x) - 1| \quad x \mapsto 2g(x+1).$$

v) Determinate l'espressione della funzione composta $(f \circ g)(x)$.

3) i) Calcolate i seguenti limiti:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x + x^2}{\log|x| + 3x^2}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+2x)}{3x}.$$

ii) Calcolate la somma $\sum_{n=1}^4 \int_n^{n+1} (e^x + 1) dx$.

iii) Determinate l'equazione della retta tangente r al grafico di $f(x) = -x^2 + 4x + 1$ nel punto di coordinata $x_0 = 0$, e rappresentate graficamente (nello stesso sistema di riferimento) la funzione f e la retta r .

- 4) Sia data la funzione integrale $F(x) = \int_0^x \frac{t}{t^2 + 1} dt$ definita su $[0, 1]$.
- i) Determinate la monotonia di $F(x)$ su $[0, 1]$.
 - ii) Determinate gli eventuali punti di minimo e di massimo di F .

-
- 5) i) Studiate (insieme di definizione, segno, comportamento agli estremi dell'insieme di definizione, asintoti, derivabilità, punti critici e monotonia, convessità/concavità) la funzione definita da

$$f(x) = \frac{x^3}{x - 1}$$

e rappresentatela graficamente nel piano cartesiano.

- ii) Verificate che $f(x) = x^2 + x + 1 + \frac{1}{x - 1}$.
- iii) Calcolate $\int_2^3 f(x) dx$.

-
- 6) Sia $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua e derivabile. Dite se le seguenti affermazioni sono vere o false (motivando le risposte):
- i) Se $f'(x) > 0$ su $[0, 1]$, allora $f(x) > 0$ su $[0, 1]$.
 - ii) Se $f(0) = 2$ e $f'(x) > 0$ su $[0, 1]$, allora $f(x) > 0$ su $[0, 1]$.
 - iii) Se $f(x) < 0$ su $[0, 1]$, allora $f'(x) < 0$ su $[0, 1]$.
 - iv) Se $f'(\frac{1}{2}) = 0$, allora $x_0 = \frac{1}{2}$ è un punto di minimo.
-

COGNOME _____ NOME _____ MATRICOLA <table border="1" style="display: inline-table; border-collapse: collapse; text-align: center; width: 100px;"> <tr> <td style="width: 15px; height: 15px;"></td> <td style="width: 15px; height: 15px;"></td> <td style="width: 15px; height: 15px;"></td> <td style="width: 15px; height: 15px;"></td> <td style="width: 15px; height: 15px;"></td> <td style="width: 15px; height: 15px;"></td> </tr> </table>							NON SCRIVERE QUI <table border="1" style="display: inline-table; border-collapse: collapse; text-align: center; width: 100px;"> <tr> <td style="width: 15px; height: 15px;"></td> <td style="width: 15px; height: 15px;"></td> <td style="width: 15px; height: 15px;"></td> <td style="width: 15px; height: 15px;"></td> <td style="width: 15px; height: 15px;"></td> <td style="width: 15px; height: 15px;"></td> </tr> </table> <table border="1" style="border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="width: 50px; height: 50px; vertical-align: middle; font-size: 24px;">B</td> </tr> </table>							B
B														

UNIVERSITÀ DI TRENTO — DIP. DI PSICOLOGIA E SCIENZE COGNITIVE
 CdL IN SCIENZE E TECNICHE DI PSICOLOGIA COGNITIVA
 ESAME SCRITTO DI ANALISI MATEMATICA
 A.A. 2016-2017 — ROVERETO, 13 GENNAIO 2017

Riempite immediatamente questo foglio scrivendo in stampatello cognome, nome e numero di matricola. Scrivete cognome e nome (in stampatello) su ogni foglio a quadretti. Il tempo massimo per svolgere la prova è di **DUE ORE E MEZZA**.

È obbligatorio consegnare sia il testo, sia tutti i fogli ricevuti; al momento della consegna, inserite tutti gli altri fogli, compreso quello con il testo, dentro uno dei fogli a quadretti.

Potete usare solo il vostro materiale di scrittura e il vostro materiale di studio. Non usate il colore rosso.

1) Siano dati gli insiemi

$$A = \{x \in \mathbb{R} : 2^{x^2+3x} \leq \frac{1}{4^x}\}; \quad B = \{x \in \mathbb{R} : \frac{|x+1|}{x^2+2x-3} < 0\}.$$

- i) Determinate A e B e rappresentateli sulla retta reale. Dite se sono intervalli.
- ii) Determinate $A \cup B$ e $A \cap B$.
- iii) Dite se A e B sono insiemi limitati. Rappresentate graficamente $A \times B$.

2) Siano $f, g : [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ le funzioni definite da

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x+1} & \text{se } -2 \leq x < -1 \\ x+1 & \text{se } -1 \leq x \leq 1 \\ 2^x & \text{se } 1 < x \leq 2, \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} 2 - |x-1| & \text{se } x \in [-2, 0] \\ -(x-1)^2 + 1 & \text{se } x \in]0, 2]. \end{cases}$$

- i) Rappresentate graficamente f e g .
- ii) Motivate l'iniettività di f . Determinate $f([-2, 2])$. Rappresentate graficamente la funzione inversa $f^{-1} : f([-2, 2]) \rightarrow [-2, 2]$.
- iii) Determinate il minimo e il massimo (risp. i punti di minimo e di massimo) di g .
- iv) Rappresentate, nei rispettivi domini, i grafici delle funzioni

$$x \mapsto |g(x) - 1| \quad x \mapsto 2g(x+1).$$

- v) Determinate l'espressione della funzione composta $(f \circ g)(x)$.

3) i) Calcolate i seguenti limiti:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x + 3x^3}{\log|x| + 2x^3}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{4x}.$$

- ii) Calcolate la somma $\sum_{n=1}^5 \int_n^{n+1} (x - e^x) dx$.

- iii) Determinate l'equazione della retta tangente r al grafico di $f(x) = -x^2 - 4x + 1$ nel punto di coordinata $x_0 = 0$, e rappresentate graficamente (nello stesso sistema di riferimento) la funzione f e la retta r .

- 4) Sia data la funzione integrale $F(x) = \int_0^x \frac{-t}{t^2 + 1} dt$ definita su $[0, 1]$.
- i) Determinate la monotonia di $F(x)$ su $[0, 1]$.
 - ii) Determinate gli eventuali punti di minimo e di massimo di F .

-
- 5) i) Studiate (insieme di definizione, segno, comportamento agli estremi dell'insieme di definizione, asintoti, derivabilità, punti critici e monotonia, convessità/concavità) la funzione definita da

$$f(x) = \frac{x^3}{1-x}$$

e rappresentatela graficamente nel piano cartesiano.

- ii) Verificate che $f(x) = -x^2 - x - 1 + \frac{1}{1-x}$.

- iii) Calcolate $\int_2^3 f(x) dx$.

-
- 6) Sia $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua e derivabile. Dite se le seguenti affermazioni sono vere o false (motivando le risposte):
- i) Se $f'(x) < 0$ su $[0, 1]$, allora $f(x) < 0$ su $[0, 1]$.
 - ii) Se $f(0) = 2$ e $f'(x) > 0$ su $[0, 1]$, allora $f(x) > 0$ su $[0, 1]$.
 - iii) Se $f(x) > 0$ su $[0, 1]$, allora $f'(x) > 0$ su $[0, 1]$.
 - iv) Se $f'(\frac{1}{2}) = 0$, allora $x_0 = \frac{1}{2}$ è un punto di massimo.
-