

COGNOME _____

NOME _____

MATRICOLA

--	--	--	--	--	--

NON SCRIVERE QUI

A

1	2	3	4	5	6
---	---	---	---	---	---

UNIVERSITÀ DI TRENTO — DIP. DI PSICOLOGIA E SCIENZE COGNITIVE

CdL IN SCIENZE E TECNICHE DI PSICOLOGIA COGNITIVA

ESAME SCRITTO DI ANALISI MATEMATICA

A.A. 2015-2016 — ROVERETO, 1 FEBBRAIO 2016

Riempite immediatamente questo foglio scrivendo in stampatello cognome, nome e numero di matricola. Scrivete cognome e nome (in stampatello) su ogni foglio a quadretti. Il tempo massimo per svolgere la prova è di **DUE ORE E MEZZA**.

È obbligatorio consegnare sia il testo, sia tutti i fogli ricevuti; al momento della consegna, inserite tutti gli altri fogli, compreso quello con il testo, dentro uno dei fogli a quadretti.

Potete usare solo il vostro materiale di scrittura e il vostro materiale di studio. Non usate il colore rosso.

1) Siano dati gli insiemi

$$A = \{x \in \mathbb{R} : (\log_2 4) \log(x+2) - \log(x+5) \leq \log(-x)\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{R} : 3|x+1| - x^2 \geq -1\}.$$

i) Determinate A e B e rappresentateli sulla retta reale.

ii) Determinate $A \cup B$ e $\mathbb{R} \setminus A$. Rappresentate graficamente $A \times B$.

iii) Dite se A e B sono insiemi limitati. Determinate, se esistono, il minimo e il massimo di B .

2) Siano $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ le funzioni definite da $f(x) = x|x|$ e $g(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x} & \text{se } x < 1 \\ \frac{1}{x^3} & \text{se } x \geq 1. \end{cases}$

i) Rappresentate graficamente f e g .

ii) Verificate se g è una funzione continua in $x = 1$.

iii) Calcolate $\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(h) - f(0)}{h}$ e $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h}$. Dite se f è derivabile in $x = 0$.

iv) Dite se f è iniettiva. Determinate l'immagine di g .

v) Determinate il minimo e il massimo (risp. i punti di minimo e di massimo) di f su $[-1, 2]$.

vi) Determinate l'espressione della funzione composta $(g \circ f)(x)$.

3) i) Calcolate

$$\int_1^2 \left(e^{3x} + \frac{1}{x^2}\right) dx; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+3x)}{2x}; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^{-x} + x^3}{4x^3 + \log x}.$$

ii) Scrivete, usando il simbolo di sommatoria, la seguente espressione:

$$\log\left(\frac{5}{4}\right) - \log\left(\frac{10}{9}\right) + \cdots - \log\left(\frac{122}{121}\right).$$

- 4) Sia $f(x) = x \log(1+x)$ per $x \in]-1, +\infty[$.
- i) Provate che $F(x) = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\right) \log(1+x) - \frac{x^2}{4} + \frac{x}{2}$ è una primitiva di f .
 - ii) Determinate l'insieme di tutte le primitive di f . Determinate una primitiva $G(x)$ di $f(x)$ tale che $G(0) = 4$.
 - iii) Determinate l'equazione della retta tangente r al grafico di f nel punto di coordinata $x = 1$.
 - iv) Calcolate $\int_0^1 f(x) dx$.

-
- 5) i) Studiate (insieme di definizione, segno, comportamento agli estremi dell'insieme di definizione, asintoti, derivabilità, punti critici e monotonia, convessità/concavità) la funzione definita da

$$f(x) = \frac{x}{\log x - 1}$$

e rappresentatela graficamente nel piano cartesiano.

- ii) Rappresentate graficamente la funzione $f(|x|)$ nel rispettivo dominio.

-
- 6) Rappresentate graficamente l'insieme A costituito dalle coppie $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ soddisfacenti

$$\begin{cases} x^2 + 4y^2 + 8y < 0 \\ |x| \geq 1. \end{cases}$$

COGNOME _____

NOME _____

MATRICOLA

--	--	--	--	--	--

NON SCRIVERE QUI

B

1	2	3	4	5	6

UNIVERSITÀ DI TRENTO — DIP. DI PSICOLOGIA E SCIENZE COGNITIVE

CdL IN SCIENZE E TECNICHE DI PSICOLOGIA COGNITIVA

ESAME SCRITTO DI ANALISI MATEMATICA

A.A. 2015-2016 — ROVERETO, 1 FEBBRAIO 2016

Riempite immediatamente questo foglio scrivendo in stampatello cognome, nome e numero di matricola. Scrivete cognome e nome (in stampatello) su ogni foglio a quadretti. Il tempo massimo per svolgere la prova è di **DUE ORE E MEZZA**.

È obbligatorio consegnare sia il testo, sia tutti i fogli ricevuti; al momento della consegna, inserite tutti gli altri fogli, compreso quello con il testo, dentro uno dei fogli a quadretti.

Potete usare solo il vostro materiale di scrittura e il vostro materiale di studio. Non usate il colore rosso.

1) Siano dati gli insiemi

$$A = \{x \in \mathbb{R} : (\log_3 9) \log(x+2) - \log(x+5) > \log(-x)\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{R} : 3|x+1| - x^2 < -1\}.$$

i) Determinate A e B e rappresentateli sulla retta reale.

ii) Determinate $A \cup B$ e $\mathbb{R} \setminus B$. Rappresentate graficamente $B \times A$.

iii) Dite se A e B sono insiemi limitati. Determinate, se esistono, il minimo e il massimo di A .

2) Siano $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ le funzioni definite da $f(x) = -x|x|$ e $g(x) = \begin{cases} -\sqrt[3]{x} & \text{se } x < 1 \\ \frac{1}{x} & \text{se } x \geq 1. \end{cases}$

i) Rappresentate graficamente f e g .

ii) Verificate se g è una funzione continua in $x = 1$.

iii) Calcolate $\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(h) - f(0)}{h}$ e $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h}$. Dite se f è derivabile in $x = 0$.

iv) Dite se f è iniettiva. Determinate l'immagine di g .

v) Determinate il minimo e il massimo (risp. i punti di minimo e di massimo) di f su $[-3, 1]$.

vi) Determinate l'espressione della funzione composta $(g \circ f)(x)$.

3) i) Calcolate

$$\int_1^2 \left(e^{2x} - \frac{1}{x^2}\right) dx; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{3x}; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-x} - x^2}{5x^2 + \log x}.$$

ii) Scrivete, usando il simbolo di sommatoria, la seguente espressione:

$$-e^{-\frac{5}{4}} + e^{-\frac{10}{9}} - e^{-\frac{17}{16}} + \dots - e^{-\frac{145}{144}}.$$

- 4) Rappresentate graficamente l'insieme A costituito dalle coppie $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ soddisfacenti

$$\begin{cases} x^2 - 4x + 4y^2 > 0 \\ |x| \leq 1. \end{cases}$$

-
- 5) i) Studiate (insieme di definizione, segno, comportamento agli estremi dell'insieme di definizione, asintoti, derivabilità, punti critici e monotonia, convessità/concavità) la funzione definita da

$$f(x) = \frac{x}{1 - \log x}$$

e rappresentatela graficamente nel piano cartesiano.

- ii) Rappresentate graficamente la funzione $f(|x|)$ nel rispettivo dominio.

-
- 6) Sia $f(x) = x \log(1+x)$ per $x \in]-1, +\infty[$.

i) Provate che $F(x) = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\right) \log(1+x) - \frac{x^2}{4} + \frac{x}{2}$ è una primitiva di f .

ii) Determinate l'insieme di tutte le primitive di f . Determinate una primitiva $G(x)$ di $f(x)$ tale che $G(0) = 2$.

iii) Determinate l'equazione della retta tangente r al grafico di f nel punto di coordinata $x = 2$.

iv) Calcolate $\int_0^1 f(x) dx$.
