COGNOME ____________________	NON SCRIVERE QUI
NOME ____________________	1 2 3 4 5 6
MATRICOLA ⌊_⌊_⌊_⌊_⌊_⌊_⌊_⌋	A

UNIVERSITÀ DI TRENTO — DIP. DI PSICOLOGIA E SCIENZE COGNITIVE

CDL IN SCIENZE E TECNICHE DI PSICOLOGIA COGNITIVA

SECONDA PROVA INTERMEDIA DI ANALISI MATEMATICA

A.A. 2015-2016 — ROVERETO, 18 DICEMBRE 2015

Riempite immediatamente questo foglio scrivendo in stampatello cognome, nome e numero di matricola. Scrivete cognome e nome (in stampatello) su ogni foglio a quadretti. Il tempo massimo per svolgere la prova è di **DUE ORE E MEZZA**.
È obbligatorio consegnare sia il testo, sia tutti i fogli ricevuti; al momento della consegna, inserite tutti gli altri fogli, compreso quello con il testo, dentro uno dei fogli a quadretti.
Potete usare solo il vostro materiale di scrittura e il vostro materiale di studio. Non usate il colore rosso.

---

1) Risolvete in $\mathbb{R}$ le seguenti disequazioni:

$$\log(x^2 + 2|x|) < 0\,; \qquad\qquad e^{-x^2+2x} - \frac{e^{-x}}{e^{x-3}} > 0\,.$$

---

2) i) Calcolate

$$\lim_{x\to -2^-} \frac{x+4}{|x|-2}\,; \qquad \lim_{x\to -2^+} \frac{x+4}{|x|-2}\,; \qquad \lim_{x\to +\infty} \frac{x^2+e^{\alpha x}}{3x^2}\,, \text{ al variare di } \alpha \in \{-1,0,1\}\,.$$

ii) Scrivete, usando il simbolo di sommatoria, la seguente espressione:

$$\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} e^{x^2}\,dx - \int_{\frac{1}{5}}^{\frac{1}{4}} e^{x^2}\,dx + \cdots - \int_{\frac{1}{25}}^{\frac{1}{24}} e^{x^2}\,dx\,.$$

iii) Provate che per ogni $n \in \{2,3,4\}$ vale la seguente formula: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

---

3) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - x^2 & \text{se } x \le 1 \\ ax + b & \text{se } x > 1\,. \end{cases}$$

i) Determinate $a, b \in \mathbb{R}$ tale che

a) f risulti continua in $x = 1$;

b) $\displaystyle\lim_{x\to 1^-} f'(x) = \lim_{x\to 1^+} f'(x)$.

ii) Rappresentate poi graficamente la funzione f, dove a e b sono i valori determinati nel punto i). Calcolate inoltre $\displaystyle\int_0^2 |f(x)|\,dx$.

4) Sia $F(x) = \int_0^x (2t^3 - t^2 + t - 1)\, dt$ per $x \in [0,1]$.

i) Provate che F ammette un solo punto critico $x_0 \in]0,1[$.

ii) Determinate un intervallo di ampiezza minore o uguale di $\frac{1}{4}$ contenente tale punto critico.

---

5) i) Studiate (insieme di definizione, segno, comportamento agli estremi dell'insieme di definizione, continuità, derivabilità, punti critici e monotonia, convessità/concavità) la funzione definita da

$$f(x) = \frac{e^x}{|x-1|}$$

e rappresentatela graficamente nel piano cartesiano.

ii) Determinate l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto di coordinata $x_0 = 0$ e rappresentatela graficamente nello stesso sistema di riferimento della f.

---

6) i) Determinate una funzione $f : [0,2] \to \mathbb{R}$ soddisfacente le seguenti proprietà:

a) $f(\frac{3}{2}) = 0$;

b) $f'(x) > 0$ su $]0,2[$;

c) $\int_0^2 f(x)\, dx < 0$.

ii) Determinate una funzione $f : [0,2] \to \mathbb{R}$ continua tale che la funzione integrale $F(x) = \int_0^x f(t)\, dt$ risulti strettamente crescente su $[0,2]$ e tale che $F(1) = 2$.

COGNOME ____________	NON SCRIVERE QUI	B
NOME ____________	1 2 3 4 5 6	
MATRICOLA ⌊_⌊_⌊_⌊_⌊_⌊_⌊		

UNIVERSITÀ DI TRENTO — DIP. DI PSICOLOGIA E SCIENZE COGNITIVE

CDL IN SCIENZE E TECNICHE DI PSICOLOGIA COGNITIVA

SECONDA PROVA INTERMEDIA DI ANALISI MATEMATICA

A.A. 2015-2016 — ROVERETO, 18 DICEMBRE 2015

Riempite immediatamente questo foglio scrivendo in stampatello cognome, nome e numero di matricola. Scrivete cognome e nome (in stampatello) su ogni foglio a quadretti. Il tempo massimo per svolgere la prova è di **DUE ORE E MEZZA**.
È obbligatorio consegnare sia il testo, sia tutti i fogli ricevuti; al momento della consegna, inserite tutti gli altri fogli, compreso quello con il testo, dentro uno dei fogli a quadretti.
Potete usare solo il vostro materiale di scrittura e il vostro materiale di studio. Non usate il colore rosso.

1) Risolvete in $\mathbb{R}$ le seguenti disequazioni:

$$\log(x^2 + |x|) < 0\,; \qquad e^x e^{-x^2+3x} - \frac{1}{e^{x-4}} < 0\,.$$

2) i) Calcolate

$$\lim_{x\to -2^-} \frac{x+3}{2-|x|}\,; \qquad \lim_{x\to -2^+} \frac{x+3}{2-|x|}\,; \qquad \lim_{x\to +\infty} \frac{-x^2+e^{\alpha x}}{4x^2}\,,\ \text{al variare di } \alpha \in \{-1,0,1\}\,.$$

ii) Scrivete, usando il simbolo di sommatoria, la seguente espressione:

$$-\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} 2^{x^2}\,dx + \int_{\frac{1}{5}}^{\frac{1}{4}} 2^{x^2}\,dx - \cdots + \int_{\frac{1}{29}}^{\frac{1}{28}} 2^{x^2}\,dx\,.$$

iii) Provate che per ogni $n \in \{3,4\}$ vale la seguente formula: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

3) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - x & \text{se } x \le 1 \\ ax + b & \text{se } x > 1\,. \end{cases}$$

i) Determinate $a, b \in \mathbb{R}$ tale che
a) f risulti continua in $x = 1$;
b) $\displaystyle\lim_{x\to 1^-} f'(x) = \lim_{x\to 1^+} f'(x)$.

ii) Rappresentate poi graficamente la funzione f, dove a e b sono i valori determinati nel punto i). Calcolate inoltre $\displaystyle\int_0^2 |f(x)|\,dx$.

4) Sia $F(x) = \int_0^x (t^3 - t^2 + 3t - 1)\, dt$ per $x \in [0,1]$.

i) Provate che F ammette un solo punto critico $x_0 \in]0,1[$.

ii) Determinate un intervallo di ampiezza minore o uguale di $\frac{1}{4}$ contenente tale punto critico.

---

5) Studiate (insieme di definizione, segno, comportamento agli estremi dell'insieme di definizione, continuità, derivabilità, punti critici e monotonia, convessità/concavità) la funzione definita da

$$f(x) = \frac{e^x}{|x+1|}$$

e rappresentatela graficamente nel piano cartesiano.

ii) Determinate l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto di coordinata $x_0 = 0$ e rappresentatela graficamente nello stesso sistema di riferimento della f.

---

6) i) Determinate una funzione $f : [0,3] \to \mathbb{R}$ soddisfacente le seguenti proprietà:

a) $f(2) = 0$;

b) $f'(x) < 0$ su $]0,3[$;

c) $\int_0^3 f(x)\, dx > 0$.

ii) Determinate una funzione $f : [0,3] \to \mathbb{R}$ continua tale che la funzione integrale $F(x) = \int_0^x f(t)\, dt$ risulti strettamente crescente su $[0,2]$ e strettamente decrescente su $[2,3]$ e tale che $F(1) = 2$.
