COGNOME ______________________	NON SCRIVERE QUI
NOME ______________________	1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6
MATRICOLA ⌊ ⌊ ⌊ ⌊ ⌊ ⌊ ⌋	A

UNIVERSITÀ DI TRENTO — DIP. DI INGEGNERIA E SCIENZA DELL'INFORMAZIONE

CDL IN INFORMATICA - CDL IN INGEGNERIA DELL'INFORMAZIONE E DELLE COMUNICAZIONI
CDL IN INGEGNERIA DELL'INFORMAZIONE E ORGANIZZAZIONE D'IMPRESA

ESAME SCRITTO DI ANALISI MATEMATICA 1

A.A. 2015-2016 — TRENTO, 7 SETTEMBRE 2016

Riempite immediatamente questo foglio scrivendo in stampatello cognome, nome e numero di matricola. Scrivete cognome e nome (in stampatello) su ogni foglio a quadretti. Il tempo massimo per svolgere la prova è di **DUE ORE E MEZZA**.
IL SUPERAMENTO DEI PRIMI 10 ESERCIZI È CONDIZIONE NECESSARIA PERCHÈ LA SECONDA PARTE DEL COMPITO VENGA VALUTATA. È OBBLIGATORIO RIPORTARE LE RISPOSTE DEI PRIMI 10 ESERCIZI SUL FOGLIO PRESTAMPATO.
È obbligatorio consegnare sia il testo, sia tutti i fogli ricevuti; al momento della consegna, inserite tutti gli altri fogli, compreso quello con il testo, dentro uno dei fogli a quadretti.
Non usate il colore rosso.

---

a1) Determinate tutti gli $a \in \mathbb{R}$ tale che $f(x) = \sqrt{4x^2 - ax + 1}$ abbia $\mathrm{dom} f = \mathbb{R}$.

Risposta:

---

a2) Scrivete in forma cartesiana il numero complesso $\dfrac{z + \overline{z}}{2i}$, se $z = 1 + i$.

Risposta:

---

a3) Dite se la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = |x + x^3|$ è iniettiva.

Risposta:

---

a4) Sia $f : [-1, +\infty[\to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \begin{cases} |x| & \text{se } -1 \le x \le 1 \\ \frac{1}{x^2} & \text{se } x > 1 \end{cases}$ e sia $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $g(x) = e^x + 1$. Determinate l'espressione della funzione composta $(f \circ g)(x)$.

Risposta:

---

a5) Calcolate il limite $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{\sqrt[n]{2}}{\sqrt[n]{n}+1}$.

Risposta:

a6) Determinate i punti di flesso della funzione $f(x) = x^4 - x^2$.

Risposta:

a7) Calcolate $\displaystyle\int_{-2}^{3} |x-1|\,dx$.

Risposta:

a8) Sia $f:[0,3]\to\mathbb{R}$ una funzione continua tale che $f(x)<0$ per $x\in[0,3]$. Se $F:[0,3]\to\mathbb{R}$ è la funzione integrale definita da $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$, determinate il punto di minimo e il punto di massimo di F .

Risposta:

a9) Determinate il carattere della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}(1+\sqrt{n})}$.

Risposta:

a10) Determinate l'insieme delle soluzioni dell'equazione differenziale $y'' = 0$.

Risposta:

b1) Considerate, al variare di $\alpha \in [0, 2\pi[$, il seguente insieme

$$A = \{a_n = 1 + \frac{\sin \alpha}{n}; n \geq 1\}.$$

Dite se A è un insieme limitato. In caso affermativo, determinate l'estremo superiore e l'estremo inferiore di A (motivando la risposta). Dite se sono massimo e/o minimo, rispettivamente.

---

b2) Determinate l'ordine di infinitesimo e la parte principale di

$$f(x) = e^{-x \cos x} - 1 + \log(1 + x),$$

per $x \to 0$.

---

b3) i) Studiate (dominio, simmetrie, segno, comportamento agli estremi del dominio, asintoti, continuità, derivabilità, punti critici e loro natura) la funzione

$$f(x) = e^{|x| - x^3}$$

e tracciatene un grafico qualitativo.

ii) Rappresentate il grafico qualitativo della funzione $g(x) = \arctan f(x)$. Determinate $\inf\limits_{x \in \mathbb{R}} g(x)$ e $\sup\limits_{x \in \mathbb{R}} g(x)$.

---

b4) i) Determinate l'insieme di convergenza E della serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} 9^n x^{2n}$.

ii) Sia $S(x)$ la somma della serie al variare di $x \in E$. Rappresentate graficamente $S(x)$.

iii) Determinate $\alpha \in \mathbb{R}$ tale che l'integrale $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{3}} [S(x)]^{2\alpha}\, dx$ risulti convergente.

---

b5) Studiate il problema di Cauchy $\begin{cases} y' = -(\sin x)y + 2\sin x \\ y(\frac{\pi}{2}) = 0. \end{cases}$

---

b6) i) Sia $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ una funzione. Allora f si dice *derivabile in* $x_0 \in]a, b[$ se ...

ii) Scrivete l'enunciato e la dimostrazione del *Teorema del valor medio o di Lagrange.*

Cognome ____________ Nome ____________ Matricola ⌊_⌊_⌊_⌊_⌊_⌊_⌋	Non scrivere qui 1 2 3 4 5 6 B

Università di Trento — Dip. di Ingegneria e Scienza dell'Informazione

CdL in Informatica - CdL in Ingegneria dell'informazione e delle comunicazioni
CdL in Ingegneria dell'informazione e organizzazione d'impresa

Esame scritto di Analisi Matematica 1

A.A. 2015-2016 — Trento, 7 settembre 2016

Riempite immediatamente questo foglio scrivendo in stampatello cognome, nome e numero di matricola. Scrivete cognome e nome (in stampatello) su ogni foglio a quadretti. Il tempo massimo per svolgere la prova è di **DUE ORE E MEZZA**.
IL SUPERAMENTO DEI PRIMI 10 ESERCIZI È CONDIZIONE NECESSARIA PERCHÈ LA SECONDA PARTE DEL COMPITO VENGA VALUTATA. È OBBLIGATORIO RIPORTARE LE RISPOSTE DEI PRIMI 10 ESERCIZI SUL FOGLIO PRESTAMPATO.
È obbligatorio consegnare sia il testo, sia tutti i fogli ricevuti; al momento della consegna, inserite tutti gli altri fogli, compreso quello con il testo, dentro uno dei fogli a quadretti.
Non usate il colore rosso.

a1) Determinate tutti gli $a \in \mathbb{R}$ tale che $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + a^2}$ abbia $\operatorname{dom} f = \mathbb{R}$.

Risposta:

a2) Scrivete in forma cartesiana il numero complesso $\dfrac{z + \overline{z}}{2i}$, se $z = 2 - i$.

Risposta:

a3) Dite se la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x + x^3$ è iniettiva.

Risposta:

a4) Sia $f : [-1, +\infty[\to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \begin{cases} |x| & \text{se } -1 \le x \le 1 \\ \frac{1}{x^2} & \text{se } x > 1 \end{cases}$ e sia $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $g(x) = \sin x$. Determinate l'espressione della funzione composta $(f \circ g)(x)$.

Risposta:

a5) Calcolate il limite $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{2\sqrt[n]{3}}{\sqrt[n]{n}-3}$.

Risposta:

a6) Determinate i punti di flesso della funzione $f(x) = x^2 - x^4$.

Risposta:

a7) Calcolate $\displaystyle\int_{-1}^{3} |x-2|\,dx$.

Risposta:

a8) Sia $f : [0,3] \to \mathbb{R}$ una funzione continua e derivabile tale che $f'(x) < 0$ per $x \in [0,3]$. Se $F : [0,3] \to \mathbb{R}$ è la funzione integrale definita da $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$, studiate la convessità/concavità di F .

Risposta:

a9) Determinate il carattere della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}(1+n)}$.

Risposta:

a10) Determinate l'insieme delle soluzioni dell'equazione differenziale $y'' = 2$.

Risposta:

b1) Considerate, al variare di $\alpha \in [0, 2\pi[$, il seguente insieme

$$A = \{a_n = 1 + \frac{\cos\alpha}{n}; n \geq 1\}.$$

Dite se A è un insieme limitato. In caso affermativo, determinate l'estremo superiore e l'estremo inferiore di A (motivando la risposta). Dite se sono massimo e/o minimo, rispettivamente.

---

b2) Determinate l'ordine di infinitesimo e la parte principale di

$$f(x) = e^{x\cos x} - 1 + \log(1 - x),$$

per $x \to 0$.

---

b3) i) Studiate (dominio, simmetrie, segno, comportamento agli estremi del dominio, asintoti, continuità, derivabilità, punti critici e loro natura) la funzione

$$f(x) = e^{-|x|+x^3}$$

e tracciatene un grafico qualitativo.

ii) Rappresentate il grafico qualitativo della funzione $g(x) = \arctan f(x)$. Determinate $\inf\limits_{x\in\mathbb{R}} g(x)$ e $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}} g(x)$.

---

b4) i) Determinate l'insieme di convergenza E della serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} 4^n x^{2n}$.

ii) Sia $S(x)$ la somma della serie al variare di $x \in E$. Rappresentate graficamente $S(x)$.

iii) Determinate $\alpha \in \mathbb{R}$ tale che l'integrale $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} [S(x)]^{3\alpha}\, dx$ risulti convergente.

---

b5) Studiate il problema di Cauchy $\begin{cases} y' = (\cos x)y + 3\cos x \\ y(\frac{\pi}{2}) = 1. \end{cases}$

---

b6) i) Sia $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ una funzione. Allora f si dice *continua in* $x_0 \in]a, b[$ se ...

ii) Scrivete l'enunciato e la dimostrazione del *Teorema di Fermat*.
