Università di Trento - Dip. di Ingegneria e Scienza dell'Informazione

CdL in Informatica, Ingegneria dell'informazione e delle comunicazioni e Ingegneria dell'informazione e organizzazione d'impresa

a.a. 2015-2016 - Foglio di esercizi 2

1) Provate, usando il principio di induzione, che

i) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{n+2}{2^n}$ per ogni $n \geq 0$.

ii) $n^2 \geq 2n+1$ per ogni $n \geq 3$.

iii) $2^n \geq n^2$ per ogni $n \geq 4$.

2) Rappresentate graficamente nel piano cartesiano l'insieme

$$A = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : \sqrt{x+2} < y \leq 2 - 2|x|\}.$$

Dite se l'insieme $B = \{x \in \mathbf{R} : (x,y) \in A\}$ è un intervallo.

3) Verificate (anche solo graficamente) che l'insieme delle soluzioni A della disequazione $\dfrac{1}{|x|} > |x| - 2$ non è un intervallo. Determinate $\sup A$ e $\inf A$.

4) i) Determinate il dominio delle funzioni

$$f(x) = \log_2(x + \sqrt{x^2-1}); \qquad g(x) = \sqrt{\frac{2}{x} + |x+1|}.$$

Determinate poi gli insiemi $A = \{x \in \mathrm{domf} : f(x) \leq 1\}$ e $B = \{x \in \mathrm{domg} : g(x) \leq 1\}$.

ii) Determinate il dominio di $f(x) = \sqrt{1-x^3} + \sqrt{x^3+1}$. Individuate eventuali simmetrie, e discutete la sua iniettività.

iii) Determinate il dominio di $f(x) = \log_3(\sin x - \frac{1}{2})$. Dite se f è iniettiva. Provate che f è negativa.

5) Date le funzioni $f, g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definite da

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^3} & \text{se } x > 0 \\ -\sqrt{|x|} & \text{se } x \leq 0, \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} 2x-3 & \text{se } x \geq 2 \\ x^2-2x+1 & \text{se } x < 2, \end{cases}$$

i) determinate, leggendo dai grafici, l'immagine di f e di g; verificate se sono funzioni iniettive e/o suriettive.

ii) Determinate l'espressione delle funzioni composte $g \circ f$ e $f \circ g$.

6) Date le funzioni $f, g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definite da

$$f(x) = x^2 - 1 \qquad g(x) = \begin{cases} x^3+1 & \text{se } x \leq 0 \\ \log x & \text{se } x > 0, \end{cases}$$

determinate l'espressione delle funzioni composte $g \circ f$ e $f \circ g$.

7) i) Sia $f : A \subseteq \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una funzione. Scrivete la definizione di

a) maggiorante di f b) estremo superiore di f c) massimo di f.

ii) Sia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ la funzione definita da

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2} + 1 & \text{se } x \leq -1 \\ -x^3 & \text{se } -1 < x < 1 \\ -2^{-x} & \text{se } x \geq 1\,. \end{cases}$$

Usando la rappresentazione grafica di f,
a) determinate l'insieme dei maggioranti (risp. dei minoranti) di f.
b) determinate $\inf_{\mathbf{R}} f$ e $\sup_{\mathbf{R}} f$. Essi sono massimo e minimo, rispettivamente?

8) i) Data la funzione $h(x) = \sin^2 x - 2\sin x - 1$, esprimete h come funzione composta di due funzioni, di cui una è la funzione $f(x) = \sin x$.
ii) Determinate l'immagine di h. Determinate $\inf_{\mathbf{R}} h$ e $\sup_{\mathbf{R}} h$.

9) Studiate la monotonia delle seguenti successioni:
i) $a_n = \cos \dfrac{1}{n+1}$ $n \geq 0$; $b_n = \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{1}{n}\right)$ $n \geq 1$;

ii) $a_n = \dfrac{n^2+1}{n^2-1}$ $n \geq 2$; $b_n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n^2-5n}$ $n \geq 0$.

10) Date le funzioni $f : [-1, 1] \to \mathbf{R}$ e $g, h : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definite da

$$f(x) = \arcsin x\,; \quad g(x) = \begin{cases} \arctan|x| & \text{se } |x| \leq 1 \\ -\arctan|x| + \frac{\pi}{4} & \text{altrimenti,} \end{cases} \quad h(x) = \begin{cases} -|x| & \text{se } |x| < \frac{\pi}{4} \\ 1 & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

determinate, dove esistono, l'espressione delle funzioni composte $h \circ g$ e $h \circ f$.

11) i) Data la funzione $f : [-1, +\infty[\to f([-1, +\infty[)$ definita da $f(x) = x^2 + 2x - 1$, determinate l'espressione della funzione inversa $f^{-1}(x)$.
ii) Rappresentate graficamente nello stesso sistema di riferimento la funzione f e la funzione f^{-1}.
iii) Scrivete, dove esiste, l'espressione della funzione reciproca $\dfrac{1}{f(x)}$ di $f(x)$. Calcolate $\dfrac{1}{f(x)}$ e $f^{-1}(x)$ per $x \in \{0, 2, 7\}$.

12) i) Provate che ogni parabola di equazione $y = ax^2 + bx + c$, con $a, b, c \in \mathbf{R}$ $a \neq 0$, si può scrivere come $y = a(x - x_0)^2 + y_0$ con $x_0, y_0 \in \mathbf{R}$.

ii) Rappresentate graficamente nel piano cartesiano le funzioni f definite su $\mathbf{R}$ da

$$-3x^2 - x\,; \qquad x^2 + 2x - 4\,; \qquad |-x^2 - x|\,; \qquad ||x^2 + 2x - 3| - 5|\,.$$